Lógica de primer orden

Dos de los objetivos de la lógica proposicional:

- Poder modelar el proceso de razonamiento.
- Poder formalizar la noción de demostración.

¿Podemos expresar el siguiente argumento en lógica proposicional?

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿Podemos demostrar que para el conjunto de los números naturales es cierto que todo número es par o impar?

Lógica de primer orden

El poder expresivo de la lógica proposicional es limitado.

- ¿Por qué usamos esta lógica?

Vamos a introducir una lógica más expresiva.

- Tiene algunas de las buenas propiedades de la lógica proposicional, pero no todas!

Para expresar el argumento mostrado al principio necesitamos cuantificadores: para todo y existe.

Lógica de primer orden: Vocabulario

Una fórmula en lógica de primer orden está definida sobre algunas constantes, funciones y predicados.

Un vocabulario $\mathcal{L}$ es la unión de tres conjuntos:

$$\begin{array}{lcl} \text{constantes} & : & \{c_1, \ldots, c_\ell, \ldots\}, \\ \text{funciones} & : & \{f_1, \ldots, f_m, \ldots\}, \\ \text{relaciones} & : & \{R_1, \ldots, R_n, \ldots\}. \end{array}$$

Notación: aridad de una función f (relación R) es el número de argumentos de f.

- Cada función tiene una aridad mayor a 0.

- Cada relación tiene una aridad mayor o igual a 0.

Lógica de primer orden: Vocabulario

Ejemplo: Para los números naturales $\mathcal{L}$ es la unión de

$$\begin{array}{lcl} \text{constantes} & : & \{0, 1\}, \\ \text{funciones} & : & \{s, +, \cdot\}, \\ \text{relaciones} & : & \{<\}. \end{array}$$

s es una función unaria, $+$ y $\cdot$ son funciones binarias y $<$ es una relación binaria.

Lógica de primer orden: Sintaxis

Las fórmulas de la lógica de primer orden se construyen usando:

- Conectivos lógicos: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$.
- Paréntesis: (y).
- Relación binaria $=$.
- Variables.
- Cuantificadores: $\forall$ y $\exists$.

Veamos algunos ejemplos, antes de introducir formalmente la sintaxis de la lógica de primer orden.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Ejemplos

Sea $\mathcal{L} = \{0,\ 1,\ s,\ +,\ \cdot,\ <\}$.

- $1 = s(0)$.

  Para la igualdad usamos notación infija: No escribimos $= (1, s(0))$.

- $\forall x\ x < s(x)$.

  Usamos notación infija para funciones y relaciones comunes.

- $\forall x \exists y\ x = y + y$.

- $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Términos

Desde ahora en adelante: Asumimos dada una lista infinita de variables.

El conjunto de $\mathcal{L}$-términos es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Cada constante c en $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{L}$-término.
- Cada variable x es un $\mathcal{L}$-término.
- Si t_1, ..., t_n son $\mathcal{L}$-términos y f es una función n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $f(t_1, \ldots, t_n)$ es un $\mathcal{L}$-término.

Ejemplos: 0, $s(s(s(1)))$ y $s(0) \cdot s(x)$.

Sintaxis de la lógica de primer orden: Fórmulas

El conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas es el menor conjunto que satisface las siguientes condiciones:

- Si t_1 y t_2 son $\mathcal{L}$-términos, entonces $t_1 = t_2$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si t_1, …, t_n son $\mathcal{L}$-términos y R es una relación n-aria en $\mathcal{L}$, entonces $R(t_1, \ldots, t_n)$ es una $\mathcal{L}$-fórmula.
- Si φ y ψ son $\mathcal{L}$-fórmulas, entonces $(\neg\varphi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \to \psi)$ y $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.
- Si φ es una $\mathcal{L}$-fórmula y x es una variable, entonces $(\exists x\ \varphi)$ y $(\forall x\ \varphi)$ son $\mathcal{L}$-fórmulas.

Notación: $t_1 = t_2$ y $R(t_1, \ldots, t_n)$ son llamadas fórmulas atómicas.

Lógica de primer orden: Semántica

Notación: Omitimos paréntesis si no se produce una ambigüedad.

¿Es $\forall x \exists y \; x = y + y$ cierta en $\mathcal{L} = \{0, 1, s, +, \cdot, <\}$?

- Si pensamos en los números naturales es falsa.
- Pero $\mathcal{L}$ también puede usarse como vocabulario para los números reales, y en este conjunto la fórmula es cierta.

El valor de verdad de una fórmula depende de la **interpretación que se da a las constantes, funciones y relaciones.**

- Tenemos que introducir la noción de estructura.

Semántica de la lógica de primer orden: Estructuras

Una $\mathcal{L}$-estructura interpreta todos los componentes de $\mathcal{L}$ en un dominio.

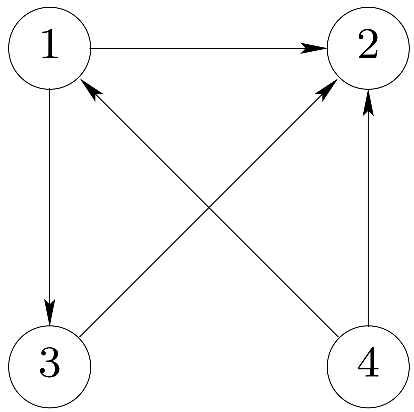
Una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ contiene:

- Un dominio A no vacío.
- Para cada constante $c \in \mathcal{L}$, una interpretación $c^A \in A$ de c.
- Para cada función m-aria $f \in \mathcal{L}$, una interpretación $f^A : A^m \to A$ de f.
- Para cada relación n-aria $R \in \mathcal{L}$, una interpretación $R^A \subseteq A^n$ de R.

Notación: $\mathfrak{A} = \langle A, c^A, \ldots, f^A, \ldots, R^A, \ldots \rangle$.

Algunos ejemplos de estructuras

Para representar grafos usamos un vocabulario $\mathcal{L} = \{E\}$. Por ejemplo, el siguiente grafo:



es representado por la estructura $\mathfrak{A} = \langle A, E^A \rangle$, donde:

$$
\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
E^A &= \{(1,2), (1,3), (3,2), (4,1), (4,2)\}.
\end{aligned}
$$

Algunos ejemplos de estructuras

Los números naturales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{N} \quad = \quad \langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, 1^{\mathbb{N}}, s^{\mathbb{N}}, +^{\mathbb{N}}, \cdot^{\mathbb{N}}, <^{\mathbb{N}} \rangle,$$

Mientras que los números reales son representados por la estructura:

$$\mathfrak{R} \quad = \quad \langle \mathbb{R}, 0^{\mathbb{R}}, 1^{\mathbb{R}}, s^{\mathbb{R}}, +^{\mathbb{R}}, \cdot^{\mathbb{R}}, <^{\mathbb{R}} \rangle.$$

Ahora podemos decir que $\mathfrak{N}$ no satisface $\forall x \exists y \; x = y + y$ y que $\mathfrak{R}$ si satisface esta fórmula.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Necesitamos introducir la noción de variable libre.

El conjunto de variables de un $\mathcal{L}$-término t se define como:

- Si t es una constante, entonces $V(t) = \emptyset$.
- Si $t = x$ es una variable, entonces $V(t) = \{x\}$.
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $V(t) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} V(f(g(x,y), s(0))) &= V(g(x,y)) \cup V(s(0)) \\ &= V(x) \cup V(y) \cup V(0) \\ &= \{x\} \cup \{y\} \cup \emptyset \\ &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

El conjunto de variables de una $\mathcal{L}$-fórmula φ se define como:

- Si $\varphi \ = \ t_1 = t_2$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup V(t_2)$.
- Si $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $V(\varphi) = V(t_1) \cup \cdots \cup V(t_n)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $V(\varphi) = V(\psi)$.
- Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ $(\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\})$, entonces $V(\varphi) = V(\psi) \cup V(\theta)$.
- Si $\varphi = (\exists x \ \psi)$ o $\varphi = (\forall x \ \psi)$, entonces $V(\varphi) = \{x\} \cup V(\psi)$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
V((\exists x \ P(x)) \vee (\forall y \ Q(s(y)))) &= V(\exists x \ P(x)) \cup V(\forall y \ Q(s(y))) \\
&= V(P(x)) \cup V(Q(s(y))) \\
&= V(x) \cup V(s(y)) \\
&= \{x, y\}
\end{aligned}$$

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

El conjunto de variables libres de una $\mathcal{L}$-fórmula φ se define como:

- Si φ es una fórmula atómica, entonces $VL(\varphi) = V(\varphi)$.
- Si $\varphi = (\neg\psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi)$.
- Si $\varphi = (\psi \star \theta)$ ($\star \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \cup VL(\theta)$.
- Si $\varphi = (\exists x\ \psi)$ o $\varphi = (\forall x\ \psi)$, entonces $VL(\varphi) = VL(\psi) \setminus \{x\}$.

Variable libre: No aparece cuantificada.

Semántica de la lógica de primer orden: Variables libres

Ejemplos:

$$\begin{aligned} VL(P(x) \wedge \exists y\, Q(x, y)) &= \{x\}, \\ VL(P(z) \wedge \exists z\, R(z)) &= \{z\}. \end{aligned}$$

Notación:

- Si φ es una fórmula, entonces usamos $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ para indicar que $VL(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_k\}$.

- Decimos que φ es una oración si $VL(\varphi) = \emptyset$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Si una fórmula contiene variables libres, entonces no podemos decir directamente que es verdadera o falsa en una estructura.

- ¿Es $x < s(0)$ cierta en $\mathfrak{N}$?

El valor de verdad de una fórmula con variables libres depende de los valores dados a estas variables.

- Si x es 0, entonces $x < s(0)$ es cierta en $\mathfrak{N}$. Pero si x es 1, entonces es falsa.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Dada una estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A, una asignación σ es una función que asigna a cada variable un valor en A.

Extendemos σ para dar valores a los términos:

- Si $t = c$ es una constante, entonces $\hat{\sigma}(t) = c^A$.
- Si $t = x$ es una variable, entonces $\hat{\sigma}(t) = \sigma(x)$.
- Si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, entonces $\hat{\sigma}(t) = f^A(\hat{\sigma}(t_1), \ldots, \hat{\sigma}(t_n))$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Ejemplo: Si $\sigma(x) = 7$ es una asignación para $\mathfrak{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}(s(1) \cdot s(x)) &= \hat{\sigma}(s(1)) \ \cdot^{\mathbb{N}} \ \hat{\sigma}(s(x)) \\
&= s^{\mathbb{N}}(\hat{\sigma}(1)) \ \cdot^{\mathbb{N}} \ s^{\mathbb{N}}(\hat{\sigma}(x)) \\
&= s^{\mathbb{N}}(1^{\mathbb{N}}) \ \cdot^{\mathbb{N}} \ s^{\mathbb{N}}(\sigma(x)) \\
&= 2 \ \cdot^{\mathbb{N}} \ s^{\mathbb{N}}(7) \\
&= 2 \ \cdot^{\mathbb{N}} \ 8 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Por simplicidad usamos σ en lugar de $\hat{\sigma}$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

Vamos a definir la semántica de la lógica de primer orden.

Dado: Un vocabulario $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ con dominio A y una asignación σ para $\mathfrak{A}$.

Definición: Decimos que $(\mathfrak{A}, \sigma)$ satisface una $\mathcal{L}$-fórmula φ, denotado como $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$, si y sólo si:

- $\varphi \;=\; t_1 = t_2$ y $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$.
- $\varphi \;=\; R(t_1, \ldots, t_n)$ y $(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)) \in R^A$.
- $\varphi \;=\; (\neg\psi)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$.
- $\varphi \;=\; (\psi \vee \theta)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$.

Semántica de la lógica de primer orden: Definición

- $\varphi = (\psi \wedge \theta)$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$.

- $\varphi = (\psi \rightarrow \theta)$ y $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$ o $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$.

- $\varphi = (\psi \leftrightarrow \theta)$ y ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \theta$ o ambos $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \psi$, $(\mathfrak{A}, \sigma) \not\models \theta$.

- $\varphi = (\exists x \ \psi)$ y existe $a \in A$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$, donde

$$\sigma[x/a](y) = \begin{cases} a & y = x, \\ \sigma(y) & y \neq x. \end{cases}$$

- $\varphi = (\forall x \ \psi)$ y para todo $a \in A$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma[x/a]) \models \psi$.

Nota: Si φ es una oración, podemos decir que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Semántica de la lógica de primer orden: Ejemplos

Sea $\mathfrak{A} = \langle A, E^A \rangle$, donde $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $E^A = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2),$ $(4, 1), (4, 2)\}$.

- ¿Cuáles de las siguientes fórmulas son ciertas en $\mathfrak{A}$: $\exists x \forall y\ E(x, y)$, $\forall x \exists y\ E(x, y)$, $\exists x \forall y\ \neg E(x, y)$, $\forall x \exists y\ \neg E(x, y)$?

Ejercicio: Sea f una función unaria y $\mathcal{L} = \{f\}$. Construya una estructura finita que satisfaga $\varphi = \forall x \forall y\ (f(x) = f(y) \to x = y)$.

Ejercicio: Sean $\mathcal{L}$ y φ como en el ejercicio anterior. Construya una estructura que satisfaga $\psi = \varphi \wedge \exists x \forall y\ f(y) \neq x$. ¿Existe una estructura finita que satisfaga ψ?

Dos nociones útiles

Decimos que una $\mathcal{L}$-fórmula φ es satisfacible si existe una $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y una asignación σ para $\mathfrak{A}$ tal que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- Si φ es oración, entonces φ es satisfacible si existe $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Decimos que una $\mathcal{L}$-fórmula φ es válida si para toda $\mathcal{L}$-estructura $\mathfrak{A}$ y toda asignación σ para $\mathfrak{A}$ se tiene que $(\mathfrak{A}, \sigma) \models \varphi$.

- Si φ es oración, entonces φ es válida si para todo $\mathfrak{A}$ se tiene que $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Ejercicio: Construya una fórmula válida.

Dos nociones útiles

Al igual que en la lógica proposicional, la lógica de primer orden tiene asociados algunos problemas de decisión:

$$\begin{aligned} \text{SAT} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración satisfacible}\}, \\ \text{VAL} &= \{\varphi \mid \varphi \text{ es una oración válida}\}. \end{aligned}$$

¿Son estos problemas más difíciles que para el caso de la lógica proposicional?

- ¿Cómo se demuestra que son al menos tan difíciles?

Vamos a mostrar una primera diferencia entre estas dos lógicas ...