

Algoritmos de Aproximación Part 2

Note Title

11/10/2009

Definición (minimización)
 A es $p(n)$ -aproximación

$$\forall n \text{ existe } \frac{C_A(x)}{C_{OPT}(x)} \leq p(n)$$

Definición PTAS ("Polynomial Time Approximation Scheme")

Un esquema de aproximación polinomial para un problema es

Un algoritmo A que recibe como Input

- una instancia del problema
- un parámetro $\epsilon > 0$

y produce una $(1+\epsilon)$ approximation

$\forall \epsilon$ fijo, el tiempo de A debe ser polinomial en n (el tamaño de la instancia)

Nota: puede ser exponencial en $\frac{1}{\epsilon}$ (o peor)

Definición FPTAS (= "Fully PTAS")

Un esquema de aproximación completamente polinomial es un PTAS

donde el tiempo del algoritmo es

polinomial / en n
 en $1/\epsilon$

Problema de la Mochila

n objetos con $(x_1, \dots, x_n)$ volúmenes
y $(c_1, \dots, c_n)$ costos
Un tamaño máximo V

Encuentra $S \subseteq [n]$ tq $\sum_{i \in S} V_i \leq V$

$\sum_{i \in S} C_i$ máxima

Solucion Exponencial

Por $L = \{y_1, \dots, y_m\}$, definimos $L + v_i = \{y_1 + v_i, \dots, y_m + v_i\}$
costo de solucion potencial.

Algoritmo

$L \leftarrow \{0\}$

For $i \leftarrow 1$ to n

$L \leftarrow \text{merge}(L, L + v_i)$

prune (L, v) (remover soluciones parciales
de volumen $> V$)

return la solucion en L de max costo.

Solucion aproximada

Definimos recorte (L, δ)

$\forall y, z \in L$ z "represente" a y si

$$\frac{y}{1+\delta} \leq z \leq y$$

eliminamos de L $\forall y$ representados por alguno z
(no 1^{ra} eliminado de L)

Recortar (L, δ)

$L = \{y_1, \dots, y_m\}$ ordenado

$L' \leftarrow \{y_1\}$

$Last \leftarrow y_1$

For $i \leftarrow 2$ to m

if $y_i > Last(1 + \delta)$

$L' \leftarrow L' \cdot \{y_i\}$

$Last \leftarrow y_i$

return L'

$\Leftarrow$ Concatenación

Algoritmo de Aproximación (n, ϵ)
(similar al algoritmo exacto)

$L \leftarrow \{0\}$

For $i \leftarrow 1$ to n

$L \leftarrow \text{merge}(L, L + v_i)$

$\text{prune}(L, v)$

$L \leftarrow \text{recortar}(L, \frac{\epsilon}{2n})$

Return la solución en L de max costo.

Análisis es una $(1+\epsilon)$ aproximación

① Solución es Válida : $\sum v_i \leq V$

② En el paso i $\forall z \in L_{OPT} \leftarrow$ algo exacto exponencial
 $\exists y \in L_A$ tq z representa a y .

$\Rightarrow$ Luego de n pasos, z^* óptimo en L_{OPT}
tiene un representante y^* en L_A tal que

$$\frac{z^*}{1+\epsilon} \leq \frac{z^*}{(1+\frac{\epsilon}{2n})^n} \leq y^* \leq z^*$$

③ Mostrar $\frac{3^x}{1+\varepsilon} \leq y^x$

Mostrar $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \leq 1 + \varepsilon$ es suficiente

$$\left(1 + \frac{\varepsilon}{2n}\right)^n \stackrel{?}{\leq} 1 + \varepsilon$$

(...) Puro calculo $\Rightarrow (1+\varepsilon)$ approximation.

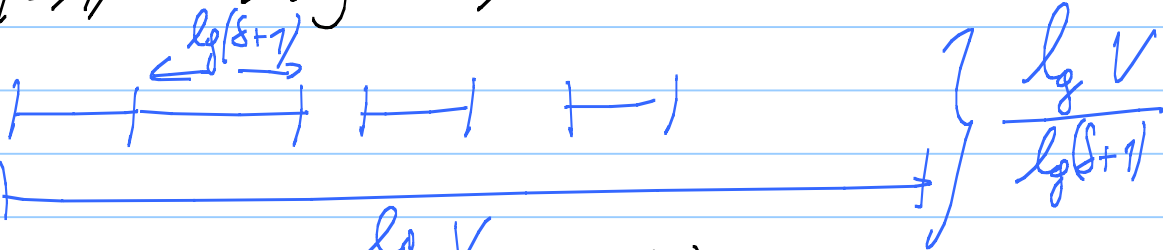
④ El algoritmo es polinomial.

Cuan largo puede ser L ?

* el ultimo elemento es $\leq V$

* el "gap" entre elementos $y_{i+1} > y_i (1+\delta)$

$$L = \{0, y_1, \dots, V\} \leadsto$$



$$|L| \leq 1 + \frac{\lg V}{\lg(\frac{\varepsilon}{2^n} + 1)} \leadsto (---) O\left(\frac{n \lg V}{\varepsilon}\right)$$

