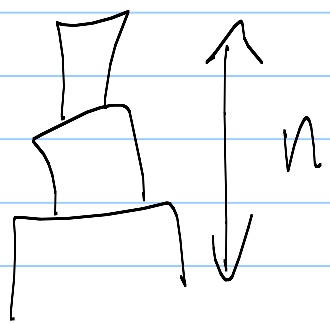
Recurrencias

Note Title 8/11/2009

① Ejemplo

Torre de Hanoi:



Cuando movimientos T_n para move n discos (y con cual algoritmos?)

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
$\vdots$	
n	$T_n = 2T_{n-1} + 1$

Solucion $T_n = 2^n - 1$

1. Adivinar + Verificar

2. Analitica

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$
$$= 2 \times (2T_{n-2} + 1) + 1$$
$$= 4T_{n-2} + 3$$
$$= 4(2T_{n-3} + 1) + 3$$
$$= 8T_{n-3} + 7$$

= Complejidad exacta

__Tarea__ Disk Pile $P_b(s, n_1, \dots, n_s)$

= Pila de Discos

de s tamaños distintos $(s < n)$

n_i discos de tamaño t_i

$t_1 \leq \dots < t_s$

Cuanto movimientos se necesitan para mover la pila?

2 Recurrencias Telescopicos

Forma general

$$X_0 = a_0$$

$$X_{n+1} = X_n + a_n$$

Solucion

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

Ejemplos

- $X_0 = 0 \quad X_{n+1} = n + X_n$

$$X_n = \sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

3 Recurrencias Lineales Homogenes

Ejemplo Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{M} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = (P D P^{-1})^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

$$= P D^n P^{-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Calcular } D$$

$\rightsquigarrow$ polinomio cacterístico

Supongamos λ^n es una solución $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$\lambda^n = \lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} \Rightarrow \lambda^n - \lambda^{n-1} - \lambda^{n-2} = 0$$

$$\lambda^{n-2}\left(\lambda^2-\lambda-1\right)=0 \qquad \lambda=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_0=0\\ \lambda_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ \lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}$$

Todas las soluciones estan de la forma

$$F_n = C_0\,\lambda_0^n + C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

$$= C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

En Final $F_0 = 0 = C_1 + C_2$

$$F_1 = 1 = C_1\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\,\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{C_1+C_2}{2} + \frac{C_1-C_2}{2}\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Forma general es

$$a_d X_{n+d} + \cdots + a_1 X_{n+1} + a_0 X_n = 0$$

5 Teorema Maestro

Ejemplos Dividir para Reinar

- Busqueda Binaria $\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = 1 + T_{n/2} \end{cases}$

- Merge Sort $\begin{cases} T_1 = 1 \\ T_n = 2 \times T_{n/2} + n - 1 \end{cases}$

a) Teorema Maestro (version Simple)

Forma general $T(n) = a\, T(n/b) + cn$

Solución

Caso $a < b$ $T(n) \in O(n)$

Caso $a = b$ $T(n) \in O(n \log n)$

Caso $a > b$ $T(n) \in O(n^{\log_b a})$

5) Teorema Maestro (versión completa)

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

__caso 1__ $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$$

__caso 2__ $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log^k n)$ para $k \geq 0$

$$T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \log^{k+1} n)$$

__caso 3__ $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ y $f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ para $c \geq 0$

$$T(n) \in \Theta(f(n))$$

Teorema Maestro Simple:

Una idea de la prueba

1. Simplificar $T(n) = a\,T(n/b) + cn$

en $S_k = T(b^k) = a\,S_{k-1} + c\,b^k$

2. Resolver

⤳ Telescopica $S_k = \left(c \sum_{i=0}^{k-1} a^i\right) + S_0 a^k$

$= c\,\frac{a^k - 1}{a - 1} + S_0 a^k$ Si $a \neq 1$

① Simplificar

$$S_k \triangleq \frac{T(b^k)}{a^k}$$

$$= a\,\frac{T(b^{k-1})}{a^k} + c\,\frac{b^k}{a^k}$$

$$= S_{k-1} + c\left(\frac{b}{a}\right)^k$$

$$S_k = c\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{b}{a}\right)^i + S_0$$

caso $\frac{b}{a} > 1$

$\frac{b}{a} = 1$ $\qquad$ $\frac{b}{a} < 1$

$\forall S_i \quad \frac{b}{a} = 1$

$$S_k = c\,(k+1) + S_1$$

$$T(n) \in O\left(a^{\log_b n}\left(\log_b n + 1\right)\right)$$

$$\in O(n \log n)$$

$\forall S_i \quad \frac{b}{a} < 1$

$$S_k \leq c \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^i + S_0 \leq c\,\frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{\infty}}{1 - \frac{b}{a}} + S_0$$

$$= c\,\frac{a}{a-b} + S_0$$

$$T(n) = a^{\log_b n} * S_{\log_b n} \in O\left(a^{\log_b n}\right)$$

* Si $\frac{b}{a} > 1$

$$S_k = c \, \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^k}{1 - \frac{b}{a}} \in O\left(\left(\frac{b}{a}\right)^k\right)$$

$$\Rightarrow T(n) \in \Theta\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\log_b n} * a^{\log_b n}\right)$$

$$\in O\left(b^{\log_b n}\right) \quad \Theta(n)$$

6 Que hacer con otros tipos?

$$T(n) = n + T(\lceil \alpha_1 n \rceil) + \dots + T(\lceil \alpha_k n \rceil)$$

1. Supongamas $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k < 1$ (no tiene sentido de otra manera)

2. Adivinamos

$T(n) \leq cn$ (Hipotesis H_n) (H_0 es verdad)

Supongamos $\exists N$ tq $\forall n < N$ H_n es verdad

$$T(N) \leq N + c\alpha_1 N + c\alpha_2 N + \dots + c\alpha_k N$$
$$\leq N(1 + c(\alpha_1 + \dots + \alpha_k))$$

H_N es verificada

Si $\quad 1 + C(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) \leq C$

$\iff \alpha_1 + \cdots + \alpha_k \leq 1 - \dfrac{1}{C}$ $\quad$ Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k < 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)} \leq C$

Hay una solucion Lineal.