CC3102-1: Auxiliar semana n°2

Profesor: Gonzalo Navarro B.
Auxiliares: Esteban Allende, Raimundo Briceño

05 de agosto, 2009

Pregunta 1 (Conjuntos)

1. Sea U un conjunto no vacío y $A \subseteq U$. Pruebe que si:

$$(\forall X, Y \in \mathcal{P}(U))\,(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)$$

entonces $A = \phi$.

2. Sean A, B subconjuntos de un mismo universo U. Probar que:

$$A \cap B = \phi \Longleftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\phi\}$$

Pregunta 2 (Relaciones)

1. Sea E un conjunto no vacío y considere $K \in \mathcal{P}(E)$ fijo, con $K \neq \phi$. Se define en $\mathcal{P}(E)$ la relación $\mathcal{R}_K$ por:

$$A \mathcal{R}_K B \Longleftrightarrow B \cap K \subseteq A$$

   (a) Pruebe que $\mathcal{R}_K$ es refleja y transitiva.

   (b) Proponga un conjunto $K \in \mathcal{P}(E)$ de modo que $\mathcal{R}_K$ sea una relación de orden. Justifique.

2. Se define la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ por:

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow xy > 0$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Calcule el conjunto cuociente $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) / \mathcal{R}$.

3. Demuestre que la relación de congruencia módulo k en el conjunto de los números enteros es relación de equivalencia, donde se define: $a \sim b$ sí y sólo sí $a - b$ es múltiplo de k.

Pregunta 3 (Funciones)

1. Sea U el conjunto universo y $A, B \subseteq U$. Se define:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(U) & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) \\ & X & \longrightarrow & f(X) = A \cap (B \cup X) \end{array}$$

   (a) Pruebe que $f(f(X)) = f(X), \forall X \in \mathcal{P}(U)$.

   (b) Si $A \neq U \vee B \neq \phi$, pruebe que f no es inyectiva.

   (c) Si $A \neq U$, pruebe que f no es sobreyectiva.

Pregunta 4 (Cardinalidad)

1. Sea A un conjunto no numerable, y sea $B \subseteq A$ un conjunto numerable.

   (a) Pruebe que el conjunto $A \setminus B$ es no numerable.

   (b) Demuestre, usando lo anterior, que el conjunto $\mathcal{I}$ de los números irracionales es no numerable.

2. Sea $A = \{0, 1, 2, ..., n\}$ y considere una secuencia de elementos en A de la forma: $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ (es decir, $x_i \in A, \forall i \in \mathbb{N}$). Probar que existen $l, j \in \mathbb{N}$, $l \neq j$, tales que $x_l \neq x_j$.

3. Sea $E = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{-1, 1\}^n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$. Demuestre que:

   (a) E es infinito.

   (b) E tiene la misma cardinalidad de $\mathbb{N}$.

4. Llamaremos cadena a una secuencia finita de símbolos de un alfabeto Σ, es decir a un elemento de:

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i = \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \ldots$$

   donde $\Sigma^1 = \Sigma$, $\Sigma^k = \Sigma \times \Sigma^{k-1}$. Σ^* denota el conjunto de todas las secuencias finitas de símbolos de Σ. El conjunto Σ^0 tiene un sólo elemento llamado ε, que corresponde a la cadena vacía. Si una cadena $x \in \Sigma^k$, entonces decimos que su largo es $|x| = k$ (por ello $|\varepsilon| = 0$). Muestre que Σ^* es numerable. ¿Qué se puede decir del conjunto de todas las secuencias de símbolos de Σ?