Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero
Fecha: 26 de Agosto

Auxiliar 3: Buen Orden e Inducción

1 Materia

1.1 Buen Orden

1. Relaciones de equivalencia
   (a) Una relación R en A es de equivalencia si es refleja, simétrica, y transitiva.
   (b) Dado $p \geq 2$, la relación de congruencia $\equiv_p$de congruencia módulo p es una relación de equivalencia.
   $a \equiv_p b \Leftrightarrow p$ divide $b - a$
   (c) Para $a \in A$ denotamos por $[a]_R$ la clase de equivalencia de a con respecto a la relación de equivalencia R. Esta se define como $[a]_R = \{b|(a, b) \in R\}$
   (d) $[a]_R = [b]_R$ si y solo si $[a]_R \cap [b]_R \neq \phi$
   (e) $\bigcup_{a \in R} [a]_R = A$

2. Ordenes parciales
   (a) Una relación R en A es un orden parcial si es refleja, antisimétrica, y transitiva. Comúnmente denotamos los ordenes parciales como (A,$\preceq$)
   (b) Las siguientes relaciones son ordenes parciales:
      i. $(\mathbb{N}, \leq)$
      ii. ($\mathbb{N}\backslash\{0\}$,|) (divisibilidad)
      iii. $(2^A, \subseteq)$, donde A es cualquier conjunto
   (c) Se dice que un orden parcial (A,$\preceq$) es total si para cada a,b$\in$A se tiene que a$\preceq$b o b$\preceq$a.
   (d) Sea (A,$\preceq$) un orden total. Decimos que $\preceq$ es un buen orden en A, si cada A'$\subseteq$A no vacio tiene un menor elemento con respecto a $\preceq$.

3. Inducción bien Ordenada

   Teorema (Inducción bien ordenada)

   Sea A un conjunto que tiene un buen orden $\preceq$. Entonces la propiedad P es cierta para todo elemento a $\in$A, si:
   Inducción: Para todo b$\in$A, si P es cierto para todo a$\in$A tal que a$\preceq$b pero a$\neq$b, entonces P es cierto en b.

1.2 Inducción

1. Principio de inducción: Una propiedad P es cierta de todos los números naturales si:
   (a) P(1) es cierto
   (b) para todo número natural n, si P(n) es cierto entonces P(n + 1) es cierto.

   $P(1) \wedge \forall k(P(k) \rightarrow P(k+1)) \Longrightarrow \forall n P(n)$

2. Principio de Inducción Fuerte: Una propiedad P es cierta de todos los números naturales si:
   (a) P(1) es cierto
   (b) para todo número natural n, si P(j) es cierto para todo j$\in$[1, n], entonces P(n + 1) también es cierto.

   $P(1) \wedge \forall k(\forall j, (j \leq k) \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)) \Longrightarrow \forall n P(n)$

3. Principio del buen orden: Todo conjunto no vacío de números naturales positivos tiene un menor elemento.
4. Proposición
   (a) Si el principio del buen orden es cierto sobre los enteros positivos entonces el principio de inducción fuerte también es cierto sobre los enteros positivos.
   (b) Si el principio de inducción es cierto sobre los enteros positivos entonces el principio del buen orden es también cierto sobre los enteros positivos.
5. Teorema

   Los siguientes postulados son equivalentes sobre los enteros positivos:
   (a) Principio del buen orden.
   (b) Principio de inducción fuerte.
   (c) Principio de inducción.

1.3 Inducción estructural

1. La definición recursiva de conjuntos se basa en lo siguiente:
   (a) Regla base: Un conjunto inicial de elementos que pertenecen al conjunto es especificado.
   (b) Regla inductiva: Regla que define cómo agregar nuevo elementos al conjuntos desde aquellos que ya están en el conjunto.
   (c) Regla de exclusión: El conjunto no contiene nada más que aquello especificado por la regla base o que se obtiene recursivamente por aplicación de la regla recursiva.
2. Conjunto de strings: Sea Σ un alfabeto. El conjunto Σ^* de los strings sobre alfabeto Σ se define recursivamente como:
   (a) El string vacío ε pertenece a Σ^*.
   (b) Si el string w está en Σ^* y x$\in \Sigma$, entonces wx pertenece también a Σ^*.

   Definimos la concatenación $w_1 \cdot w_2$ de strings sobre Σ^* como
   (a) Si w $\in \Sigma^*$ entonces w$\cdot\varepsilon = w$.
   (b) Si $w_1, w_2 \in \Sigma^*$ y x$\in \Sigma$, entonces $w_1 \cdot (w_2 x) = (w_1 \cdot w_2)x$

   El largo $l(w)$ de un string se define como
   (a) $l(\varepsilon) = 0$
   (b) $l(wx) = l(w) + 1$
3. Para demostrar cosas sobre conjuntos definidos recursivamente podemos utilizar inducción estructural
   (a) Se cumple para el conjunto inicial
   (b) Se demuestra para cada regla inductiva, es decir, se demuestra para todos los nuevos elementos a partir de que se cumple para todos los elementos que ya están en el conjunto.

2 Ejercicios

1. Demuestre que $(\mathbb{R}, \leq)$ no es un buen orden.
2. Demuestre que $(\mathbb{R}^+, \leq)$ no es un buen orden.
3. Demuestre que $(\mathbb{N}, \leq)$ es un buen orden
4. Demuestre que si se tiene un conjunto de n rectas en el plano, tal que entre ellas no hay dos paralelas ni tres concurrentes (tres que se intersectan en el mismo punto), entonces ellas dan lugar a $\frac{n^2+n+2}{2}$ regiones.
5. Demuestre que para todo i,j≥1, cualquier tablero de dimensiones 2i×3j se puede cubrir con piezas en forma de L.
6. Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

   (a) $f(0, y) = y + 1$
   (b) $f(x + 1, 0) = f(x, 1)$
   (c) $f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))$

   Demuestre que f está definida para todos los pares (x,y)$\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
7. Considere el conjunto de string A sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ definido por las reglas

   (a) $\{\varepsilon, 0, 1\} \subset A$
   (b) $x, y \in A \Longrightarrow 1xy \in A$

   Defina recursivamente la funcion U(w), tal que cuenta la cantidad de 1's de w. Demuestre que

   (a) $U(w) \leq l(w)$
   (b) Existe $c, k \geq 1$ tal que $k * U(w) + c \geq l(w)$. Encuentre el menor k que cumple lo anterior, con el respectivo c.
8. Se define el conjunto de árboles en T como

   (a) $(\cdot) \in T$
   (b) $A_1, .., A_n \in T \Longrightarrow (\cdot, A_1, ..., A_n) \in T$

   Defina Nodos(T), Hojas(T) y Altura(T) las funciones que calculan el número de nodos,hojas y la altura de T, respectivamente. Demuestre que $(Altura(T) + 1) * Hojas(T) \geq Nodos(T)$