Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero
Fecha: 10 de Noviembre

# Auxiliar 9: Grafos y Teoría de Números

## 1 Problemas

1. Demuestre que $p$ es primo ssi ($\mathbb{Z}_p$,+,*) es cuerpo, donde $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$

   Hint: Para el inverso usen el pequeño teorema de Fermat

2. Demuestre que no existe un polinomio P(x) no constante tal que P($n$) sea primo, para cada $n \in \mathbb{N}$

   Hint: P(1) es primo, P(1+kp) es primo, y usar los coeficientes binomiales.

3. Sean $k_1...k_n$ entero positivos. Demuestre que existe S$\subseteq \{1, .., n\}$ tal que $\sum\limits_{i \in S} k_i =_n 0$

   Hint: Defina de forma recursiva n sumas modulo n, y vea los casos que estas sumas sean diferentes entre si, y que exista un par iguales

4. Demuestre que si $m = p_1^{\alpha_1}...p_k^{\alpha_k}$ y $n = p_1^{\beta_1}...p_k^{\beta_k}$, sus descomposiciones en primos, entonces $\gcd(m, n) = p_1^{\gamma_1}...p_k^{\gamma_k}$, donde $\gamma_i = \min(\alpha_i, \beta_i),\ i = 1...k$

   Hint: $\gcd(m, n)$ es el "mayor" común divisor

5. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Se define $G_{comp} = (V, E_{comp})$ tal que para todo par $(v_1, v_2) \in V \times V$

   $$(v_1, v_2) \in E_{comp} \text{ ssi } (v_1, v_2) \notin E \text{ y } v_1 \neq v_2$$

   Decimos que $G$ es autocomplementario si $G$ es isomorfo con $G_{comp}$. Demuestre que todo grafo simple autocomplementario se tiene que $|V| = 4m$ o $|V| = 4m + 1$, para algun $m \geq 0$

6. En todo grafo simple existen al menos dos nodos con el mismo grafo

7. En todo grafo simple se tiene que $|V| = \chi(G) * I(G)$, donde $\chi(G)$ es el número cromático y $I(G)$ es el tamaño del mayor conjunto independiente de vértices (conjunto de vértices no adyacentes)

8. Todo grafo $G$ con $m$ arcos satisface $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$