Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero
Fecha: 14 de Octubre

Auxiliar 7: Gráfos

1 Materia

1. Grafos: Un grafo G = (V, E) es un conjunto no vacío de vértices V y un conjunto E $\subset$ V$\times$V de arcos.
2. Grafos Simples:
   (a) Cada arco conecta un par distinto de nodos
   (b) No existen dos arcos para un mismo par de nodos
   (c) No existe dirección en los arcos,
   (d) (v, v) $\notin$ E, para todo v$\in$ V
   (e) (u,v)$\in E \Longrightarrow (v, u) \in E$
3. Un multigrafo G = (V, E) es un grafo simple, pero E $\subset$ V$\times$V$\times\mathbb{N}$. La interpretación que se le da al hecho que (u, v, n)$\in$E es que existen n arcos entre u y v.
4. Un seudografo es un multigrafo que viola la condición de que (v, v) $\notin$ E, para todo v$\in$V (i.e. el grafo tiene loops)
5. Un grafo dirigido simple es un grafo simple que no satisface la condición de simetría: (u,v)$\in E \Longrightarrow (v, u) \in E$
6. Sea G = (V , E) un grafo no dirigido.
   (a) Los nodos u, v $\in$V son adyacentes si existe un arco e$\in$E tal que e = (u, v).
   (b) Un arco e $\in$E es incidente a u $\in$ V si conecta a u con algún v $\in$V .
   (c) El grado de un nodo v $\in$ V (denotado por deg(v)) es el número de ejes que son incidentes a u, excepto por los loops en v que contribuyen dos veces al grado de v.
   (d) Un nodo v$\in$V está aislado si deg(v) = 0, y está pendiendo si deg(v) = 1.
7. Teorema de los saludos
   (a) Sea G = (V , E) un grafo no dirigido. Entonces: $2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v)$
   (b) Corolario: Todo grafo no dirigido tiene un número par de nodos de grado impar.
8. Sea G = (V , E) un grafo dirigido.
   (a) Decimos que u es adyacente a v si existe arco e = (u, v) en E. Equivalentemente, decimos que v es adyacente desde u. Además, u es el nodo inicial de e, y v es el terminal.
   (b) El grado de entrada de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo terminal a v. Lo denotamos por deg$^-$(v).
   (c) Similarmente, el grado de salida de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo inicial a v. Lo denotamos por deg$^+$(v).
   (d) Sea G = (V , E) un grafo dirigido. Entonces:
   $\sum_{v\in V} \deg^-(v) = \sum_{v\in V} \deg^+(v) = |E|$
9. Un clique de n vértices v$_1$, v$_2$, . . . , v$_n$, denotado por K$_n$, es el grafo que contiene un arco por cada par de nodos v$_i$, v$_j$, 1$\leq$i , j $\leq$ n y i $\neq$ j .
10. Un ciclo de n vértices v$_1$, v$_2$, . . . , v$_n$, denotado por C$_n$, tiene como arcos a los pares: $\{$(v$_1, v_2$),(v$_2, v_3$),.......(v$_n, v_1$)$\}$
11. La rueda W$_n$ se obtiene desde C$_n$ agregando un nuevo vértice y uniendo mediente arcos este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C$_n$.

12. Un grafo G = (V , E) es bipartito, si V puede ser particionado en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco del grafo conecta un nodo de V_1 con uno de V_2.

13. Teorema

    Un grafo simple es bipartito si y solo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértice del grafo, de tal forma que ningún par u, v de vértices adyacentes recibe el mismo color.

14. El grafo bipartito es completo si existe un arco entre cada par de nodos (u, v) tal que u$\in V_1$ y v$\in V_2$.

15. Un subfgrafo de G = (V , E) es un grafo G' = (V ', E') tal que V '$\subset$V y E'$\subset$E. Decimos que el subgrafo es propio si G$\neq$ G'.

16. La secuencia de grados de un grafo simple G es la secuencia de los grados de sus nodos en orden no creciente.

17. Representación de grafos: Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.

    (a) Una de las formas es listar los nodos que son adyacentes a cada nodo. Esto se denomina la lista de adyacencia del grafo.
    (b) Otra forma es representar la adyacencia por medio de una matriz, denominada la matriz de adyacencia $\in M_{V\times V}(\mathbb{N})$
    (c) Matriz de incidencia $\in M_{V\times E}(\{0,1\})$

18. Isomorpfismo: Sean G = (V , E) y G' = (V ', E') dos grafos simples. Decimos que son isomorfos si existe una biyección f : V$\rightarrow$V ' tal que para todo v_1, v_2 $\in$V :

    $(\mathrm{v}_1, v_2)\in E \iff (\mathrm{f}(\mathrm{v}_1), f(v_2))\in E'$

    La función f es un isomorfismo entre G y G'.

19. Invariantes son propiedades P que son preservadas por los isomorfismos, e.g. número de vértices, número de arcos, grados, etc.

20. El complemento de un grafo simple G = (V , E) es el grafo $\bar{\mathrm{G}}$ = (V , $\bar{\mathrm{E}}$), tal que $(\mathrm{v}_1, v_2)\in \bar{E} \iff (\mathrm{v}_1, v_2)\notin E$.

21. Un grafo simple es complementario si G es isomorfo a $\bar{\mathrm{G}}$.

2 Ejercicios

Un grafo simple $A = (V, E)$ se dice árbol si es conexo (sin nodos aislados) y sin ciclos.

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subgrafo $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ se dice árbol generador si $\tilde{G}$ es un árbol y $V = \tilde{V}$.

1. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $n = |V|$ nodos. Las siguientes propiedades son equivalentes

    (a) G es un árbol
    (b) G es conexo y minimal, ie, para todo subgrafo propio $\tilde{G}$ con $V = \tilde{V}$ no es conexo.
    (c) G es conexo y |E|=n-1
    (d) G no tiene ciclos y es maximal, ie, si agrego un arco se forma un ciclo
    (e) G no tiene ciclos y |A|=n-1
    (f) Para todo u,v$\in V$ existe un único camino que los conecta en G

2. Un grafo conexo con k nodos tiene al menos k-1 arcos

3. Todo grado conexo contiene un árbol generador.

4. Dado un grafo simple $G = (V, E)$, se dice que $R \subseteq V$ es un recubrimiento de G si para todo $e = (u, v) \in E$, {u,v}$\cap R \neq \phi$. Se dice que $M \subseteq E$ es un matching de G si para todo $e_1 = (u_1, v_1), e_2 = (u_2, v_2) \in M$, los nodos u_1, v_1, u_2, v_2 son distintos entre sí. Luego, $card(M) \leq card(R)$. Si $card(M) = card(R)$, entonces M es máximo y R mínimo. Si G es bipartito, entonces el recíproco es cierto.