UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 3 - Semestre Primavera 2009

1. La idea de este ejercicio es contar el número de *caminos* en el plano desde el origen $(0,0)$ hasta el punto (m,n), donde m,n son naturales positivos. Cada camino consta de una serie de *pasos*, donde cada paso corresponde a una movida de una unidad hacia arriba o hacia la derecha. Por ejemplo, la secuencia

$$(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(3,2)(4,2),(4,3),(5,3)$$

es un camino desde el origen hasta el punto $(5,3)$.

¿Cuántos distintos caminos existen en el plano desde el origen $(0,0)$ hasta el punto (m,n)? Fundamente su respuesta.

Solución: Cada camino entre el origen y (m,n) se puede ver como un string de largo $m+n$ sobre alfabeto $\{0,1\}$. Cada vez que el camino hace un paso vertical colocamos un 1 en el string, y cada vez que hace un paso horizontal colocamos un 0 en el. Es decir, existe una relación 1-1 entre los strings de largo $m+n$ que tienen m 0s y los caminos entre el origen y $(m+n)$. Esto quiere decir que existen $\binom{m+n}{m}$ de estos caminos.

2. Un ropero contiene $n>0$ pares de zapatos. Si se escogen al azar $2r$ zapatos (con $2r<n$) ¿Cuál es la probabilidad de que:

   a) no haya ningún par completo;

   b) haya exactamente un par completo?

Solución:

- $(\binom{n}{2r} \cdot 2^{2r})/\binom{2n}{2r}$.
- $(\binom{n}{1} \cdot \binom{n-1}{2r-2} \cdot 2^{2r-2})/2^{2r-2}$.

3. Asuma que existen n distintas sillas. Encuentre una relación de recurrencia que determine el número de maneras en que un subconjunto de estas sillas puede ser elegido, de modo que dos sillas contiguas nunca pertenecen al subconjunto elegido, si:

   a) Las sillas están arregladas en una línea.

   b) Las sillas están arregladas en un círculo.

   Determine las condiciones iniciales en ambos casos. Fundamente su respuesta.

Solución:

- $A(n)=A(n-1)+A(n-2)$, con $A(1)=2$ y $A(2)=3$.

- Denotaremos la relación de recurrencia por $B(n)$. Es fácil ver que $B(n) = A(n-1) + A(n-3)$, donde $A(n)$ es la relación obtenida en el punto anterior. Entonces, $B(n) = B(n-1) + B(n-2)$, para todo $n \geq 3$, puesto que $B(n-1) + B(n-2) = A(n-2) + A(n-3) + A(n-4) + A(n-5) = A(n-1) + A(n-3) = B(n)$. Las condiciones iniciales son $B(1) = 2$, $B(2) = 3$.