Capítulo 4: Grafos
Clase 2: Caminos, Circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

Navegación de grafos

En muchos problemas de modelación con grafos quisiéramos utilizar la capacidad para navegar el grafo por medio de los arcos. Por ejemplo,

- ¿Cuál es la mejor ruta para hacer la distribución del correo en una ciudad?
- ¿Cuál es la manera más económica de volar de una ciudad a otra?

Informalmente, un camino es una secuencia de arcos que permiten navegar el grafo de nodo en nodo.

Caminos

Definition

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un camino entre los nodos u y v es una secuencia $e_1 e_2 \cdots e_n$ tal que existen nodos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen lo siguiente:

- $x_0 = u$ y $x_n = v$, y
- para cada $1 \leq i \leq n$, $e_i = (x_{i-1}, x_i)$.

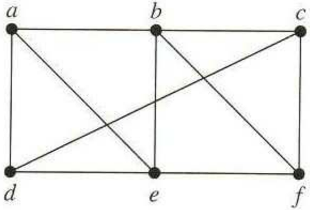
En tal caso, decimos que el camino es de largo n.

Si el grafo es simple podemos denotarlo tan solo por $u, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, v$.

Decimos que el camino es un circuito si $u = v$. Es simple si todos los e_i's son distintos

Ejercicio

Ejercicio: Ejemplifique los anteriores conceptos en el siguiente grafo.



¿Cuándo podemos concluir que es posible alcanzar un nodo del grafo desde cualquier otro nodo? ¿Cuándo siempre existe un camino entre un par de nodos arbitrario de un grafo?

Conecciones en grafos no dirigidos

¿Cuándo podemos concluir que es posible alcanzar un nodo del grafo desde cualquier otro nodo? ¿Cuándo siempre existe un camino entre un par de nodos arbitrario de un grafo?

Un grafo no dirigido es conexo si existe un camino entre cada par de nodos distintos del grafo.

Conecciones en grafos no dirigidos

¿Cuándo podemos concluir que es posible alcanzar un nodo del grafo desde cualquier otro nodo? ¿Cuándo siempre existe un camino entre un par de nodos arbitrario de un grafo?

Un grafo no dirigido es conexo si existe un camino entre cada par de nodos distintos del grafo.

Demuestre la siguiente propiedad:

Proposición

Existe un camino simple entre cada par de nodos distintos de un grafo no dirigido.

Componentes conexas

Si un grafo no es conexo, entonces está formado por la unión disjunta de sus componentes conexas.

Sea G un grafo no dirigido, entonces una componente conexa de G es un subgrafo G' de G tal que (1) G' es conexo, y (2) G' no es un subgrafo propio de otro subgrafo conexo de G. Decimos que G' es maximal.

Ejemplo: Un grafo y sus componentes conexas.

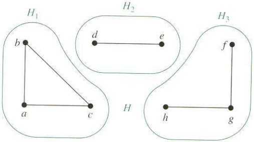


FIGURE 3 The Graph H and Its Connected Components H_1, H_2, and H_3.

Componentes conexas en redes sociales

- Se analizó el grafo de llamadas telefónicas de AT&T.
- Dos números telefónicos estaban conectados si uno había llamado al otro.
- Se descubrió una gran cantidad de componentes conexas pequeñas.
- Además existía una componente conexa muy grande, que cubría casi al 80 % de los números telefónicos.
- La distancia máxima en esta componente era tan solo 20.

Conectividad en grafos dirigidos

La definición es análoga a la de grafos no dirigidos, pero tomando en cuenta la dirección.

Dado grafo dirigido $G = (V, E)$, el grafo no dirigido subyacente G' de G se obtiene desde G computando la clausura simétrica de E.

Las definiciones de conectividad depende de si consideramos o no la dirección de los arcos:

- Un grafo dirigido es fuertemente conexo, si para todo par de vértices v, v' existe un camino dirigido de v a v' y viceversa.
- Un grafo dirigido es débilmente conexo, si para todo par de vértices v, v' existe un camino entre v y v' en el grafo no dirigido subyacente.

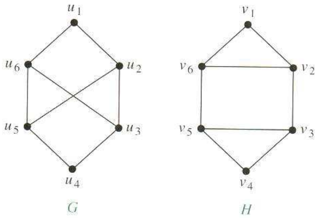
Una componente fuertemente conexa se define como antes pero con respecto a grafos dirigidos y fuertemente conexos.

Ejemplo: El grafo de la web tiene una grafo subyacente no dirigido que es no conexo, pero que tiene una componente conexa que contiene cerca del 90 % de sus páginas.

Esta componente conexa, vista a su vez como grafo dirigido, tiene una componente muy grande (53M de vértices) que es fuertemente conexa, y que se llama la componente fuertemente conexa gigante, más muchas otras más chicas.

La existencia de ceirtos caminos también puede ser utilizado como invariante.

Ejercicio: Utilice un invariante de caminos para demostrar que los siguientes grafos no son isomorfos.



Ejercicios finales

Ejercicio: Demuestre que para todo grafo simple, todo nodo de grado impar está unido mediante un camino a algún otro nodo de grado impar.

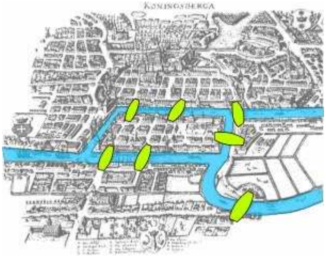
Ejercicio: Demuestre que todo grafo conexo con n vértices debe tener al menos $n - 1$ arcos.

Ejercicio: Demuestre que un grafo simple G es bipartito si y sólo si no contiene circuitos de largo impar.

Ejercicio: Demuestre que todo grafo simple $G = (V, E)$ tiene un camino que pasa solo por nodos distintos y su largo es al menos $\min\{deg(v) \mid v \in V\}$. Demuestre que tiene un ciclo que solo pasa por nodos distintos y su largo es al menos $\min\{deg(v) \mid v \in V\} + 1$.

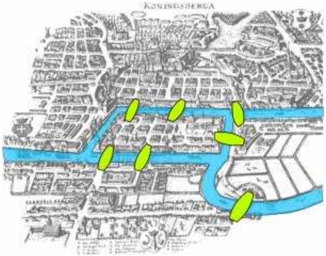
Puentes de Königsberg

El pueblo de Königsberg, Prusia, está dividido en 4 secciones por el río Pregel. Existen 7 puentes que unen las distintas secciones como se muestra en la figura:



Puentes de Königsberg

El pueblo de Königsberg, Prusia, está dividido en 4 secciones por el río Pregel. Existen 7 puentes que unen las distintas secciones como se muestra en la figura:



La pregunta que se hacía la gente del pueblo en el Siglo XVIII era si se podía comenzar en una de las 4 regiones, viajar a través de todos los puentes sin cruzar ningún puente dos veces, para luego volver a la misma región donde se comenzó.

Circuitos eulerianos

Este problema es una instancia particular del problema de chequear si un grafo contiene un circuito euleriano.

Definition

Sea G un grafo. Un circuito de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Circuitos eulerianos

Este problema es una instancia particular del problema de chequear si un grafo contiene un circuito euleriano.

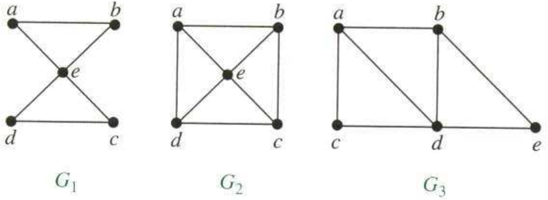
Definition

Sea G un grafo. Un circuito de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Ejercicio: Estudie si el grafo asociado a los puentes de Königsberg tiene un circuito euleriano.

Circuitos eulerianos: Ejercicio

Ejercicio: ¿Cuáles de los siguientes grafos tienen circuitos eulerianos?



Caminos eulerianos

Un concepto similar es el de camino euleriano:

Definition

Sea G un grafo. Un camino de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Caminos eulerianos

Un concepto similar es el de camino euleriano:

Definition

Sea G un grafo. Un camino de G se dice que es euleriano si es simple y pasa a través de cada arco de G.

Ejercicio: Revise los ejercicios previos con respecto a la noción de camino euleriano.

Aplicaciones de los caminos eulerianos

El estudio de los caminos eulerianos puede ser aplicado en varias áreas:

- Buscar caminos que cruzan todas las calles de una ciudad;
- cada camino en una red de transportes;
- cada link en una red de computadores, etc.

Y cada uno de éstos solo una vez.

Caracterización de Euler

Sorpresivamente, existe un criterio simple para determinar si un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano (Euler, 1736):

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

Caracterización de Euler

Sorpresivamente, existe un criterio simple para determinar si un multigrafo conexo contiene un circuito euleriano (Euler, 1736):

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un circuito euleriano si y solo si todos sus vértices tienen grado par.

A continuación demostraremos este teorema.

Demostración

Asuma primero que G tiene un circuito euleriano.

Demostración

Asuma primero que G tiene un circuito euleriano.

Considere el circuito euleriano de G. Entonces este contribuye un número par de veces al grado de cada vértice de G.

Demostración

Asuma primero que G tiene un circuito euleriano.

Considere el circuito euleriano de G. Entonces este contribuye un número par de veces al grado de cada vértice de G.

Además, el circuito pasa por cada vértice y arco de G.

Demostración

Asuma primero que G tiene un circuito euleriano.

Considere el circuito euleriano de G. Entonces este contribuye un número par de veces al grado de cada vértice de G.

Además, el circuito pasa por cada vértice y arco de G.

Concluimos que todo los vértices de G tienen grado par.

Demostración

Asuma ahora que todo vértice de G tiene grado par. Construiremos un circuito euleriano de G.

Elija un vértice cualquiera v_0 de G, y luego un arco (v_0, v_1) en G tal que $v_0 \neq v_1$.

Continuamos creando un camino simple

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$$

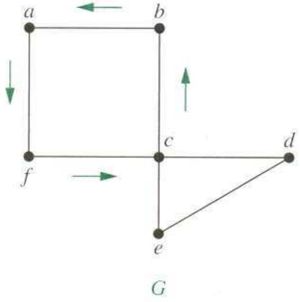
hasta que no se pueda agregar otro arco. (Esto sucederá en algún momento porque el grafo es finito).

Lemma

Siguiendo el procedimiento anterior debe ser el caso que $v_0 = v_n$.

Ilustración de la demostración

La siguiente figura ilustra la demostración:

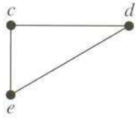


Demostración

Si todos los arcos han sido usados entonces ya sabemos que el camino construido es un circuito simple.

De otra forma, eliminamos del grafo todos los arcos que ya han sido visitados y todos los vértices que queden aislados.

Siguiendo con el ejemplo anterior, el grafo resultante es:



H

Demostración

Porque G es conexo, el grafo resultante H tiene al menos un vértice c en contacto con G. Además,

Lemma

El grafo resultante no es necesariamente conexo, pero todos sus vértices tienen grado par.

Continue el mismo proceso en H desde c. Luego, una los circuitos eulerianos obtenidos a través de los puntos de contacto de los subgrafos. Este es un circuito euleriano de G.

Caracterización de los caminos eulerianos

Demuestre lo siguiente:

Teorema

Sea G un multigrafo conexo con al menos dos vértices. Entonces G tiene un camino pero no un circuito euleriano si y solo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

¿Y los grafos dirigidos?

Demuestre lo siguiente:

Teorema

Sea G un multigrafo dirigido cuyo grafo no dirigido subyacente es conexo. Entonces G contiene un circuito euleriano si y solo si el grado de entrada de cada nodo coincide con su grado de salida.

¿Y los grafos dirigidos?

Demuestre lo siguiente:

Teorema

Sea G un multigrafo dirigido cuyo grafo no dirigido subyacente es conexo. Entonces G contiene un circuito euleriano si y solo si el grado de entrada de cada nodo coincide con su grado de salida.

Ejercicio: Caracterice la clase de los multigrafos dirigidos que contienen un camino euleriano.

Circuitos hamiltonianos

Un concepto relacionado a los circuitos eulerianos:

Definition

Sea G un grafo. Un circuito de G se dice que es hamiltoniano si es simple y pasa por cada nodo de G exactamente una vez. Igualmente, definimos camino hamiltoniano.

Circuitos hamiltonianos

Un concepto relacionado a los circuitos eulerianos:

Definition

Sea G un grafo. Un circuito de G se dice que es hamiltoniano si es simple y pasa por cada nodo de G exactamente una vez. Igualmente, definimos camino hamiltoniano.

Esta simple variación vuelve el problema más complejo: No se conoce caracterización de los grafos que admiten un circuito hamiltoniano (Y la complejidad complejidad del problema también aumenta).

Circuitos hamiltonianos: Ejercicio

Ejercicio: Encuentre un circuito hamiltoniano en la siguiente figura.

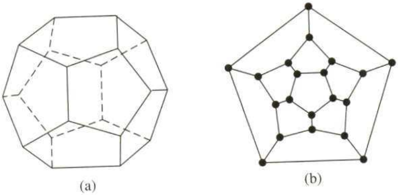


FIGURE 8 **Hamilton's "A Voyage Round the World" Puzzle.**

Esta es la solución:

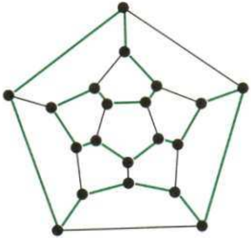


FIGURE 9 **A Solution to the "A Voyage Round the World" Puzzle.**

Consideraciones

Algunas consideraciones con respecto a los circuitos hamiltonianos:

- Si un grafo tiene un vértice que está pendiendo entonces no puede tener un camino hamiltoniano;
- si un nodo tiene grado dos, entonces los dos arcos que le son incidentes tienen que ser parte del camino hamiltoniano;
- si un nodo tiene grado mayor que dos, y se sabe que dos de los arcos incidentes pertenecen al camino hamiltoniano, entonces el resto de los arcos incidentes no pertenecen.

Circuitos hamiltonianos: Ejercicio

Ejercicio: Demuestre que los siguientes grafos no tienen circuitos hamiltonianos.

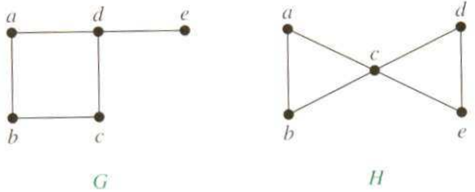


FIGURE 11 **Two Graphs That Do Not Have a Hamilton Circuit.**