Capítulo 3: Grafos

Clase 1: Grafos: Modelos, tipos, representación e isomorfismo

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

¿Por qué estudiamos a los grafos?

Los grafos son estructuras discretas que aparecen ubicuamente en cada disciplina donde se requiera modelar algo. Por ejemplo, sirven para representar:

- El esquema organizacional de una empresa;
- una red de computadores;
- un árbol genealógico;
- la interacción entre científicos;
- la web semántica, etc.

En general, los grafos son mapas conceptuales que nos ayudan a representar nuestro conocimiento.

Definición

Un grafo G está conformado por un conjunto no vacío V de vértices o nodos, y un conjunto E de arcos o aristas, tal que cada $e \in E$ tiene un par $(v_1, v_2) \in V \times V$ asociado.

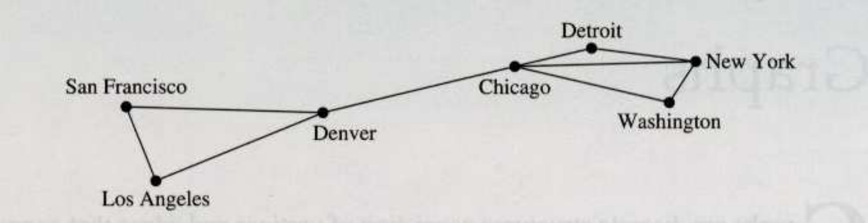
En tal caso, decimos que e conecta v_1 con v_2. Note que dos arcos diferentes pueden conectar al mismo par de vértices.

Note que en la anterior definición V y E pueden ser finitos o infinitos. Restringiremos nuestra atención durante el curso a grafos finitos, i.e. grafos para los cuales V y E son conjuntos finitos.

Abusaremos notación, y escribiremos $e = (v_1, v_2)$ si e conecta a v_1 con v_2.

Ejemplo de modelación con grafos (I)

Ejemplo: Para representar una red de computadores, podemos usar un grafo en que cada nodo es un servidor y cada arco es una conexión.



Grafos simples

En el anterior ejemplo, (1) cada arco conecta dos nodos diferentes, y (2) no existen arcos que conecten el mismo par de nodos.

Además, no existe dirección en los arcos, i.e. podemos asumir que $e = (u, v)$ conecta tanto a u con v como a v con u.

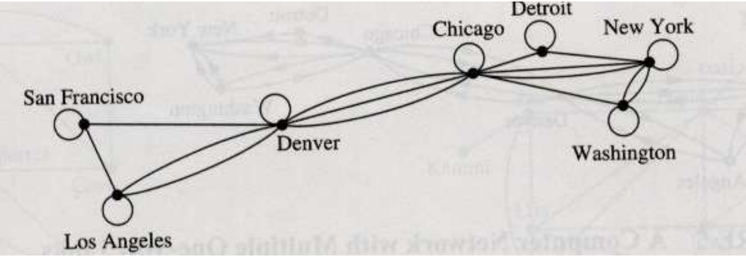
Si un grafo $G = (V, E)$ satisface todas estas propiedades decimos que es simple.

En particular, para todo grafo simple $G = (V, E)$ podemos asociar E con un subconjunto de $V \times V$ tal que:

- $(v, v) \notin E$, para todo $v \in V$; y
- $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$, para todo par $(u, v) \in V \times V$.

Ejemplo de modelación con grafos (II)

Ejemplo: Sin embargo, una red de computadores podría presentar más de una conexión entre servidores y conexiones de un servidor consigo mismo:



Multigrafos

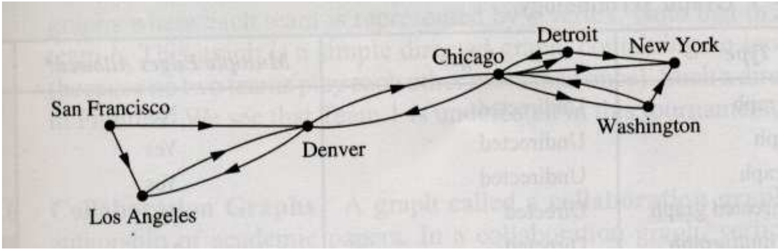
Un grafo con más de un arco conectando el mismo par de nodos es un multigrafo.

Formalmente, un multigrafo $G = (V, E)$ es un grafo simple, pero donde esta vez $E \subseteq V \times V \times \mathbb{N}$.

La interpretación que se le da al hecho que $(u, v, n) \in E$ es que existen n arcos entre u y v.

Un multigrafo que además viola la condición de que $(v, v) \notin E$, para todo $v \in V$ (i.e. el grafo tiene loops), se denomina seudografo.

Ejemplo: Pero nuestros modelos también podrían necesitar establecer la dirección de los arcos.



Grafos dirigidos

Un grafo dirigido simple es un grafo simple que no satisface la condición:

- $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$, para todo $(u, v) \in V \times V$.

En otras palabras, en un grafo dirigido cada arco tiene una dirección asociada.

Similarmente podemos definir multigrafo dirigido y seudografo dirigido.

De ahora en adelante especificaremos - antes de cada definición - a qué tipo de grafos nos estamos refiriendo.

Algunos modelos de grafos interesantes: Erdös

Grafo de colaboración científica de Erdös:

- Cada autor es representado por un nodo;
- dos autores tiene un arco entre si cuando tienen una publicación en conjunto;
- por tanto, el grafo es simple;
- el número de Erdös de un autor representa su distancia en este grafo a Paul Erdös (¿quién era?).

Algunos modelos de grafos interesantes: Erd"os

Al año 2006 el número de científicos con número de Erdös n era el siguiente:

- $n = 1$: 504;
- $n = 2$: 6,593;
- $n = 3$: 33,605;
- $n = 4$: 83,642;
- $n = 5$: 87,760;
- $n = 6$: 40,014;
- $n = 7$: 11,591;
- $n = 8$: 3,146;
- $n = 9$: 819;
- $n = 10$: 244;

Algunos modelos de grafos interesantes: La web

La web es un seudografo, donde cada nodo representa una página y un arco (a, b) representa un link de a a b.

La gracia de este grafo es que su estructura cambia prácticamente a cada segundo.

Es actualmente objeto de mucho estudio (por ejemplo, en el DCC por medio del CIW y Yahoo!).

Actualmente tiene más de 3 billones de nodos y 20 billones de arcos.

Además la distancia entre nodos suele ser pequeña (grado de separación < 20).

Terminología de grafos no dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.

Los nodos $u, v \in V$ son adyacentes si existe un arco $e \in E$ tal que $e = (u, v)$.

Un arco $e \in E$ es incidente a $u \in V$ si conecta a u con algún $v \in V$.

El grado de un nodo $v \in V$ (denotado por $deg(v)$) es el número de ejes que son incidentes a u, excepto por los loops en v que contribuyen dos veces al grado de v.

Un nodo $v \in V$ está aislado si $deg(v) = 0$, y está pendiendo si $deg(v) = 1$.

Teorema de los saludos

Teorema (Teorema de los saludos)

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Entonces:

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v).$$

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Corolario

Todo grafo no dirigido tiene un número par de nodos de grado impar.

Terminología de grafos dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Decimos que u es adyacente a v si existe arco $e = (u, v)$ en E. Equivalentemente, decimos que v es adyacente desde u.

Además, u es el nodo inicial de e, y v es el terminal.

El grado de entrada de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo terminal a v. Lo denotamos por $deg^-(v)$.

Similarmente, el grado de salida de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo inicial a v. Lo denotamos por $deg^+(v)$.

Terminología de grafos dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Decimos que u es adyacente a v si existe arco $e = (u, v)$ en E. Equivalentemente, decimos que v es adyacente desde u.

Además, u es el nodo inicial de e, y v es el terminal.

El grado de entrada de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo terminal a v. Lo denotamos por $deg^-(v)$.

Similarmente, el grado de salida de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo inicial a v. Lo denotamos por $deg^+(v)$.

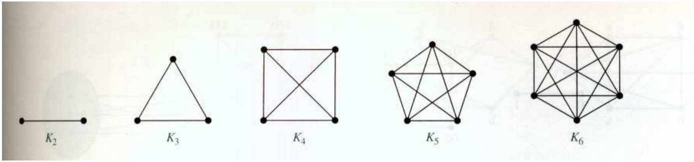
Proposición

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces:

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) \;=\; \sum_{v \in V} deg^+(v) \;=\; |E|.$$

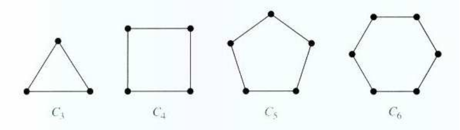
Clases de grafos simples: Cliques

Un clique de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, denotado por K_n, es el grafo que contiene un arco por cada par de nodos v_i, v_j, $1 \leq i, j, \leq n$ y $i \neq j$.



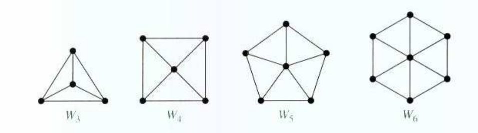
Clases de grafos simples: Ciclos

Un ciclo de n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, denotado por C_n, tiene como arcos a los pares: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$.



Clases de grafos simples: Cliques

La rueda W_n se obtiene desde C_n agregando un nuevo vértice y uniendo mediente arcos este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C_n.



Clases de grafos simples: Grafos bipartitos

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito, si V puede ser particionado en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco del grafo conecta un nodo de V_1 con uno de V_2.

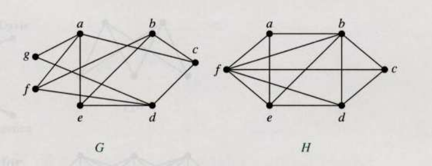
Ejemplo: C_6 es bipartito pero C_5 no lo es.

Teorema

Un grafo simple es bipartito si y solo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértice del grafo, de tal forma que ningún par u, v de vértices adyacentes recibe el mismo color.

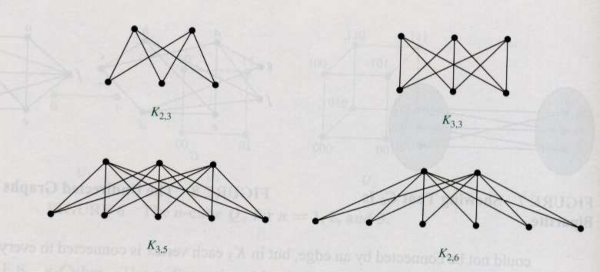
Ejercicio de grafos bipartitos

Ejercicio: Utilice el teorema anterior para determinar si los grafos de la figura son o no bipartitos.



Clases de grafos simples: Grafos bipartitos completos

El grafo bipartito es completo si existe un arco entre cada par de nodos (u, v) tal que $u \in V_1$ y $v \in V_2$.



Subgrafos

Algunas veces solo nos interesa una parte de un grafo para resolver un problema.

Un subfgrafo de $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$.

Decimos que el subgrafo es propio si $G \neq G'$.

Ejercicios finales

Ejercicio: Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, y asuma que

$$\text{mín}\,\{deg(v) \mid v \in V\} = m \quad \text{y} \quad \text{máx}\,\{deg(v) \mid v \in V\} = M.$$

Demuestre que $2|E|/|V| \geq m$ y $2|E|/|V| \leq M$.

Ejercicio: Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito simple. Demuestre que $|E| \leq |V|^2/4$.

Ejercicios finales

La secuencia de grados de un grafo simple G es la secuencia de los grados de sus nodos en orden no creciente.

Ejercicio: Asuma que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es la secuencia de grados de un grafo G. Demuestre que existe un grafo G' con vértices $v_1, \ldots, v_n$ tal que:

- $deg(v_i) = d_i$, para todo $i \in [1, n]$; y
- v_1 es adyacente a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$.

Ejercicios finales

Ejercicio: Demuestre que todo grafo simple $G = (V, E)$ con al menos un arco contiene un subgrafo $G' = (V', E')$ tal que si:

- $\delta(G')$ es el mínimo grado de un nodo en G' y
- $\epsilon(G) = |E|/|V|$ y $\epsilon(G') = |E'|/|V'|$,

entonces $\delta(G') > \epsilon(G') \geq \epsilon(G)$.

Representación de grafos

Hay diversas formas de representar los grafos, y la más conveniente depende de la aplicación que tengamos en mente.

Una de las formas es listar los nodos que son adyacentes a cada nodo. Esto se denomina la lista de adyacencia del grafo.

Otra forma es representar la adyacencia por medio de una matriz, denominada la matriz de adyacencia.

Ejemplos de lista de adyacencia

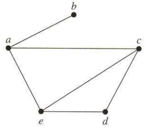


FIGURE 1 **A Simple Graph.**

TABLE 1 An Adjacency Li
for a Simple Graph.

Vertex	*Adjacent Vertices*
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

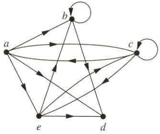
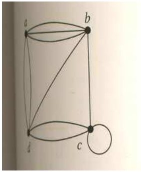


FIGURE 2 **A Directed Graph.**

TABLE 2 An Adjacency List for a
Directed Graph.

Initial Vertex	*Terminal Vertices*
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Ejemplos de matriz de adyacencia



Solution: The adjacency

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Preguntas sobre representaciones

Pregunta: ¿Cuándo es más conveniente utilizar una representación por sobre otra?

Pregunta: ¿Cuántas formas de representar el mismo grafo utilizando matrices de adyacencia existen?

Pregunta: ¿Qué otra forma de representar un grafo se le ocurren?

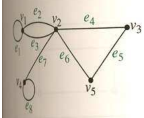


FIGURE 7
A Pseudograph.

Solution: The incidence matrix for this graph is

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
\end{array}
$$

Isomorpfismo de grafos

Muchas veces queremos saber si el patrón representado por dos grafos es el mismo. En términos formales, queremos saber si dos grafos son isomorfos.

Definición

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos simples. Decimos que son isomorfos si existe una biyección $f : V \to V'$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$:

$$(v_1, v_2) \in E \iff (f(v_1), f(v_2)) \in E'.$$

La función f es un isomorfismo entre G y G'.

Ejercicio: Demuestre que los grafos de la figura son isomorfos.

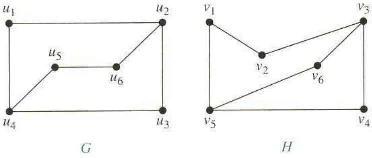


FIGURE 12 **Graphs *G* and *H*.**

Invariantes

Demostrar que dos grafos son isomorfos es difícil (los mejores algoritmos que se conocen son exponenciales).

A veces es más fácil demostrar que dos grafos no son isomorfos.

Para eso basta utilizar una propiedad P que sea preservada por los isomorfismos, e.g. número de vértices, número de arcos, grados, etc. Tales propiedades se llaman invariantes.

Demostramos entonces que un grafo la tiene pero el otro no.

Ejercicio

Ejercicio: Estudie si los siguientes grafos son isomorfos.

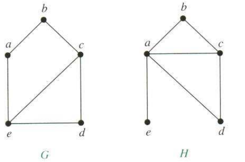


FIGURE 9 **The Graphs *G* and *H*.**

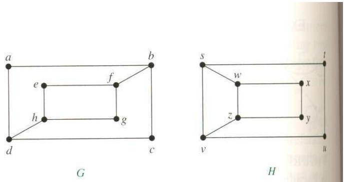


FIGURE 10 **The Graphs *G* and *H*.**

Ejercicios finales

El complemento de un grafo simple $G = (V, E)$ es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, tal que $(v_1, v_2) \in \overline{E} \Leftrightarrow (v_1, v_2) \notin E$.

Un grafo simple es complementario si G es isomorfo a $\bar{G}$.

Ejercicio: Encuentre un grafo complementario con 5 vértices.

Ejercicio: ¿Para cuáles enteros n, C_n es complementario?

Ejercicio: Demuestre que si G es un grafo complementario con n vértices, entonces $n \equiv 0$ o $n \equiv 1$ modulo 4.