Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero
Fecha: 23 de Septiembre

Auxiliar 5: Combinaciones y Probabilidades

1 Materia

1. r-permutación
   (a) Una r -permutación es un arreglo ordenado de r objetos.
   (b) Denotamos por P(n,r) el número de r -permutaciones de un conjunto con n elementos.
   (c) $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
2. r -combinación
   (a) Una r -combinación de elementos de un conjunto es un subconjunto de este con r elementos.
   (b) Denotamos el número de r -combinaciones de un conjunto con n elementos por C(n, r).
   (c) $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$ coeficientes binomiales
   (d) $C(n,r) = C(n,n-r)$
3. Coeficientes binomiales
   (a) Sean x e y variables, y n un entero no negativo. Entonces, $(x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j}y^j$
   (b) $\sum\limits_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$
   (c) $\sum\limits_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} = 0$
   (d) Identidad de Pascal: $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$
   (e) Identidad de Vandermonde: $\binom{n+m}{r} = \sum\limits_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$
   (f) $\sum\limits_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$
   (g) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$
4. Probabilidades finitas
   (a) Un experimento es un procedimiento que entrega una de entre varias posibles salidas.
   (b) El conjunto de posibles salidas del experimento se llama espacio de muestra.
   (c) Sea S un espacio finito de muestras en que cada muestra es igual de posible que todas las otras, y sea E un evento, i.e. E⊆S. La probabilidad de E se define como $P(E) = \frac{|E|}{|S|}$
   (d) $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$
   (e) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
5. Teoría de probabilidades
   (a) Sea S un espacio finito de muestras. Una distribución de probabilidad es una función $P : S \to [0,1]$ tal que $\sum\limits_{s\in S} P(s) = 1$.
   (b) Además, definimos $P(E) = \sum\limits_{s\in E} P(s)$ para $E \subseteq S$.
   (c) Sean E y F eventos tales que $P(F)> 0$. La probabilidad condicional de E dado F, se define como $P(E|F) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}$
   (d) Decimos que los eventos E y F son independientes si $P(E \cap F) = P(E)P(F)$

2 Ejercicios

1. Demuestre que

   (a) $\#\{f : \{1...N\} \to \{1...N\}, \text{ f inyectiva}\} = N!$

   (b) $\#\{f : \{1...n\} \to \{1...N\}, \text{ f inyectiva}\} = \frac{N!}{(N-n)!}$

   (c) $\#\{A \subseteq \{1...N\},\ |A| = n\} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$

2. Demuestre de forma combinatorial que $\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} N-1 \\ n-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} N-1 \\ n \end{array} \right)$

3. Si tengo n elementos distinguibles, y los quiero separar en r grupos de cantidades $n_1, .., n_r$, de forma que $\sum_{i=1}^{r} n_i = r$, la cantidad es $\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{r} n_i!}$

4. Si tengo n bolas y r urnas, la forma de poner las bolas en las urnas es $\left(\begin{array}{c} n+r-1 \\ n \end{array} \right)$

5. En el ejemplo anterior, si agrego la condición de que ninguna urna esté vacía, la cantidad es $\left(\begin{array}{c} n-1 \\ n-r \end{array} \right)$

6. Si un edificio tiene n personas y m pisos, y cada persona se baja en un piso con igual probabilidad
   Pr(En el $k - \acute{e}simo$ piso se bajan n$_k$ personas, $\forall k = 1...m) = \frac{n!}{m^n \prod\limits_{i=1}^{m} n_i!}$

7. En un grupo hay n personas, y se quiere elegir un comité de j personas. Luego, se quiere escojer un subcomité de i personas, con $i \leq j$. Entonces
   $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-i \\ j-i \end{array} \right)$