Capítulo 3: Técnicas de Conteo
Clase 2: Permutaciones y Combinaciones, Coeficientes Binomiales y Aplicaciones a Probabilidad Discreta

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

Motivación

Muchos problemas de conteo se resuelven encontrando el número de maneras de arreglar un determinado número de elementos de un conjunto.

En algunas ocasiones el orden de los elementos importa...

- ¿De cuántas formas podemos alinear a 3 alumnos de un curso de 10 alumnos?

...y en otras no...

- ¿Cuántos comités de 3 alumnos pueden formarse en un curso de 10 alumnos?

El orden sí importa: Permutaciones

Pregunta: ¿De cuántas formas podemos alinear a 3 alumnos de un curso de 10 alumnos?

El orden sí importa: Permutaciones

Pregunta: ¿De cuántas formas podemos alinear a 3 alumnos de un curso de 10 alumnos?

Respuesta: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

El orden sí importa: Permutaciones

Pregunta: ¿De cuántas formas podemos alinear a 3 alumnos de un curso de 10 alumnos?

Respuesta: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Una r-permutación es un arreglo ordenado de r objetos.

Denotamos por $P(n, r)$ el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos.

Teorema

If n es un entero positivo y $1 \leq r \leq n$, entonces
$P(n, r) =$.

El orden sí importa: Permutaciones

Pregunta: ¿De cuántas formas podemos alinear a 3 alumnos de un curso de 10 alumnos?

Respuesta: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Una r-permutación es un arreglo ordenado de r objetos.

Denotamos por $P(n, r)$ el número de r-permutaciones de un conjunto con n elementos.

Teorema

If n es un entero positivo y $1 \leq r \leq n$, entonces
$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$.

Permutaciones

Corolario

Para todo entero positivo y $r \in [0, n]$, $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Ejercicio: ¿De cuántas maneras se puede elegir a un primer, segundo y tercer ganador de entre 100 personas?

Ejercicio: ¿Cuántas permutaciones de las letras A, B, C, D, E, F, G, H contienen al string ABC?

El orden no importa: Combinaciones

Pregunta: ¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar desde un curso con 5 alumnos?

El orden no importa: Combinaciones

Pregunta: ¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar desde un curso con 5 alumnos?

Respuesta: 10.

El orden no importa: Combinaciones

Pregunta: ¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar desde un curso con 5 alumnos?

Respuesta: 10.

Una r-combinación de elementos de un conjunto es un subconjunto de este con r elementos.

Denotamos el número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos por $C(n, r)$.

Teorema

Para todo entero positivo n y $0 \leq r \leq n$, $C(n, r) =$.

El orden no importa: Combinaciones

Pregunta: ¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar desde un curso con 5 alumnos?

Respuesta: 10.

Una r-combinación de elementos de un conjunto es un subconjunto de este con r elementos.

Denotamos el número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos por $C(n, r)$.

Teorema

Para todo entero positivo n y $0 \leq r \leq n$, $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

El orden no importa: Combinaciones

Pregunta: ¿Cuántos grupos de 3 alumnos se pueden formar desde un curso con 5 alumnos?

Respuesta: 10.

Una r-combinación de elementos de un conjunto es un subconjunto de este con r elementos.

Denotamos el número de r-combinaciones de un conjunto con n elementos por $C(n, r)$.

Teorema

Para todo entero positivo n y $0 \leq r \leq n$, $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

Es usual denotar $C(n, r)$ por $\binom{n}{r}$.

Combinaciones

Corolario

Para todo entero positivo n y $0 \leq r \leq n$, $C(n,r) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$.

Esta forma es más conveniente de calcular para valores de n muy grandes.

Combinaciones

Corolario

Para todo entero positivo n y $0 \leq r \leq n$, $C(n,r) = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$.

Esta forma es más conveniente de calcular para valores de n muy grandes.

Ejercicio: ¿Cuántas manos de póker posibles existen en un mazo? ¿Cuántas formas de elegir 47 cartas desde un mazo existen?

Esto da cuenta de un fenómeno más general:

Corolario

Sean r y n enteros no negativos tales que $r \leq n$. Entonces $C(n,r) = C(n,n-r)$.

Un ejercicio final

Ejercicio: ¿Cuántas 4-permutaciones de los enteros positivos menores o iguales a 100 tienen tres enteros consecutivos en orden,

1. si es que no necesitan aparecer consecutivamente en la permutación?
2. si es que tienen que aparecer consecutivamente en la permutación?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo $n \geq 4$ contienen exactamente dos ocurrencias del string 01?

Coeficientes binomiales

Los números de la forma $\binom{n}{r}$ se llaman coeficientes binomiales porque aparecen en las expansiones de las potencias de las expresiones binomiales de la forma $(a+b)^n$.

Teorema

Sean x e y variables, y n un entero no negativo. Entonces,

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j$$

$$= \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Ejercicio: De una demostración *combinatorial* y otra por inducción.

Aplicaciones del teorema del binomio

Ejercicio: De una demostración combinatorial y otra algebraica de que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Ejercicio: Demuestre que $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Ejercicio: Demuestre que
$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots$.

Ejercicio: Demuestre combinatorialmente la identidad de Pascal, i.e. que para todo enteros positivos n y k tales que $n \geq k$, $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Ejercicio: Demuestre combinatorialmente la identidad de Vandermonde, i.e. que $\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$.

Ejercicios finales

Ejercicio: Demuestre que $\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} = \binom{n+r+1}{r}$.

Ejercicio: Demuestre combinatorialmente que $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.

Combinatoria y probabilidad discreta

La combinatoria y la probabilidad discreta tienen orígenes comúnes (por su asociación con los juegos de azar).

Actualmente las probabilidades tienen aplicaciones mucho más allá de los juegos de azar, e.g. genética, física, etc.

El origen de las probabilidades data de hace 300 años, principalmente debido al trabajo de Pascal y Laplace.

Probabilidades finitas

Aquí sólo estudiaremos probabilidades finitas.

Un experimento es un procedimiento que entrega una de entre varias posibles salidas.

El conjunto de posibles salidas del experimento se llama espacio de muestra.

Definición

Sea S un espacio finito de muestras en que cada muestra es igual de posible que todas las otras, y sea E un evento, i.e. $E \subseteq S$.
La probabilidad de E se define como $p(E) = \frac{|E|}{|S|}$.

Ejercicios de probabilidades

Ejercicio: En una lotería un jugador gana el premio mayor si elige 4 números que coincinden, en el orden correcto, con 4 números generados al azar por un proceso independiente.

- ¿Cuál es la probabilidad de ganarse el premio mayor?

Un jugador gana el premio menor si sólo 3 de los 4 dígitos coinciden.

- ¿Cuál es la probabilidad de ganarse el premio menor?

Ejercicios de probabilidades

Ejercicio: En una lotería un jugador gana el premio mayor si elige correctamente un conjunto de seis números entre 36 posibles (como el KINO).
¿Cuál es la probabilidad de sacarse el KINO?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad de que una mano de póker contenga 4 cartas del mismo tipo?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker contenga 3 cartas de un tipo y dos de otro?

Probabilidad de combinaciones de eventos

Recordatorio

- *La probabilidad del complemento del evento E es* $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$.
- *La probabilidad del evento $E_1 \cup E_2$ es* $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que un string de largo 10 generado al azar (sobre alfabeto $\{0, 1\}$) contenga un 0?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que un entero positivo elegido al azar entre 1 y 100 sea divisible por 2 o por 5?

Ejercicios de póker

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker sea un *color*, i.e. que todas las cartas sean de la misma pinta?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker contenga una *escalera*, i.e. 5 cartas que tienen tipos consecutivos, asumiendo el A como la primera y última carta del mazo?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker contenga una *escalera de color*, i.e. 5 cartas de la misma pinta que además tienen tipos consecutivos?

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que una mano de póker contenga cartas de 5 tipos distintos, pero no contenga una escalera ni un color?

Teoría de probabilidades

Nuestra suposición es hasta el momento que todos los eventos son igualmente posibles. ¿Es esta una suposición razonable?

Quisiéramos estudiar las probabilidades de forma más general, para tratar aquellos experimentos cuyos eventos tienen diferentes probabilidades.

Definición

Sea S un espacio finito de muestras. Una distribución de probabilidad es una función $p : S \to [0, 1]$ tal que

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1.$$

Además, definimos $p(E) = \sum_{s \in E} p(s)$ para $E \subseteq S$.

Ejercicio y recordatorio

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado "cargado" salga un número impar, si el 3 sale dos veces más seguido que los otros números, y todos los otros números tienen la misma probabilidad de salir?

Recordatorio

Aún bajo esta nueva definición:

- *La probabilidad del complemento del evento E es* $p(\bar{E}) = 1 - p(E)$.
- *La probabilidad del evento $E_1 \cup E_2$ es* $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$.

Probabilidad condicional

Suponga que una moneda se lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar de caras?

Probabilidad condicional

Suponga que una moneda se lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar de caras?

¿Cómo cambiaría esto si suipéramos que el primer lanzamiento dio cara?

Probabilidad condicional

Suponga que una moneda se lanza tres veces. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar de caras?

¿Cómo cambiaría esto si suipéramos que el primer lanzamiento dio cara?

Para solucionar este tipo de problemas es que utilizamos la probabilidad condicional.

Definición

Sean E y F eventos tales que $p(F) > 0$. La probabilidad condicional de E dado F, se define como:

$$p(E|F) = p(E \cap F)/p(F).$$

Ejercicios

Ejercicio: ¿Cuál es la probabilidad que un string de largo 4 tenga dos 0s consecutivos, si sabemos que el primer bit es 0?

Ejercicio: ¿Cuál es la posibilidad que una pareja tenga dos hijos hombres, si sabemos que tiene al menos un hijo hombre?

Independencia de eventos

Decimos que los eventos E y F son independientes si $p(E \cap F) = p(E)p(F)$, o equivalentemente, $p(E|F) = p(E)$.

Ejercicio: ¿Son los eventos (a) que una familia con dos hijos tenga ambos hijos hombres, y (b) que al menos uno de los dos hijos sea hombre, independientes?

Ejercicio: ¿Son los eventos (a) que una familia con 3 hijos tenga hijos de ambos sexos, y (b) que la familia tiene a lo más un hijo hombre, independientes?

El experimento de Bernoulli

Suponga que un experimento solo tiene dos salidas: o falla o tiene éxito, con probabilidad p y q, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad que al realizar n veces el experimento este tenga éxito $k \leq n$ veces, si los experimentos son independientes entre si?

El experimento de Bernoulli

Suponga que un experimento solo tiene dos salidas: o falla o tiene éxito, con probabilidad p y q, respectivamente.

¿Cuál es la probabilidad que al realizar n veces el experimento este tenga éxito $k \leq n$ veces, si los experimentos son independientes entre si?

La respuesta es $C(n,k)q^k p^{n-k}$. Note que

$$\sum_{k \in [0,n]} C(n,k)q^k p^{n-k} = 1.$$

Ejercicio: Suponga que una moneda está cargada y la probabilidad de caras es 2/3. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan 4 caras cuando la moneda se lanza 7 veces (asumiendo lanzamientos independientes)?

El problema del cumpleaños

¿Cuál es la menor cantidad de gente necesaria para asegurarse que en el grupo la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños es mayor a 1/2?

Asumiremos lo siguiente: La probabilidad de que una persona nazca en un día cualquiera es 1/366.

El problema del cumpleaños

¿Cuál es la menor cantidad de gente necesaria para asegurarse que en el grupo la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños es mayor a 1/2?

Asumiremos lo siguiente: La probabilidad de que una persona nazca en un día cualquiera es 1/366.

Note que la probabilidad p_r de que en un grupo de r personas no hayan dos con el mismo cumpleaños es:

El problema del cumpleaños

¿Cuál es la menor cantidad de gente necesaria para asegurarse que en el grupo la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños es mayor a 1/2?

Asumiremos lo siguiente: La probabilidad de que una persona nazca en un día cualquiera es 1/366.

Note que la probabilidad p_r de que en un grupo de r personas no hayan dos con el mismo cumpleaños es: $C(366, r)/366^r$

El problema del cumpleaños

¿Cuál es la menor cantidad de gente necesaria para asegurarse que en el grupo la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños es mayor a $1/2$?

Asumiremos lo siguiente: La probabilidad de que una persona nazca en un día cualquiera es $1/366$.

Note que la probabilidad p_r de que en un grupo de r personas no hayan dos con el mismo cumpleaños es: $C(366, r)/366^r$

Por tanto, queremos encontrar menor r tal que $1 - p_r > 1/2$:

.

El problema del cumpleaños

¿Cuál es la menor cantidad de gente necesaria para asegurarse que en el grupo la probabilidad de que dos personas tengan el mismo cumpleaños es mayor a $1/2$?

Asumiremos lo siguiente: La probabilidad de que una persona nazca en un día cualquiera es $1/366$.

Note que la probabilidad p_r de que en un grupo de r personas no hayan dos con el mismo cumpleaños es: $C(366, r)/366^r$

Por tanto, queremos encontrar menor r tal que $1 - p_r > 1/2$: La solución es 22.