Capítulo 3: Técnicas de Conteo
Clase 1: Conteo Básico y Principio del Palomar

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

Motivación

La combinatoria – el estudio de arreglos de objetos – es una parte importante de la matemática discreta, y ha sido estudiada por varios siglos (principalmente por su asociación con los juegos de azar).

La enumeración, o conteo, es una de las principales herramientas para resolver procesos combinatoriales.

Estas técnicas también son útiles para resolver múltiples problemas de la vida diaria:

- ¿Cuántos números telefónicos están disponibles en Chile, si ningún teléfono puede empezar ni con 0 ni con 1?
- ¿Cuántos *passwords* posibles existen en un sistema computacional?

Los dos principios fundamentales del conteo básico son:

- Regla del producto: Se utiliza cuando un procedimiento se realiza en tareas separadas.
- Regla de la suma: Se utiliza cuando un procedimiento se puede realizar en varias formas diferentes.

Regla del producto

Regla del Producto:

Asuma que un procedimiento puede ser dividido en una secuencia de m tareas $T_1, \ldots, T_m$, $m \geq 1$. Si cada tarea T_i puede ser realizada de n_i maneras, sin importar cómo se han realizado las tareas anteriores, entonces el procedimiento puede ser realizado de $n_1 n_2 \cdots n_m$ *maneras.*

A continuación veremos ejemplos de la aplicación de este producto.

Ejercicio: Una compañía con m trabajadores ha arrendado una casa con n oficinas, $m \leq n$. ¿Cuántas maneras hay de disponer a los trabajadores en diferentes oficinas?

Ejercicio: Las salas de la facultad deben ser etiquetadas con una letra del abecedario y un entero positivo no mayor a 9. ¿Cuál es el máximo número de salas que pueden ser etiquetadas diferentemente?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 7 sobre el alfabeto $\{0, 1\}$ existen?

Ejercicio: ¿Cuántas funciones hay de un conjunto de n elementos en uno de m elementos? ¿Cuántas funciones inyectivas hay?

Regla de la suma:

Suponga que una tarea puede ser realizada de n_1 maneras o de n_2 maneras o de ... o de n_m maneras, $m \geq 1$, donde para cada $i, j \in [1, m]$ tal que $i \neq j$, ninguna de las n_i maneras de realizar la tarea es la misma que una de las n_j maneras de realizar la tarea. Entonces el número de maneras de realizar la tarea es $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Ejercicio: Un estudiante puede elegir un proyecto de entre 3 listas. Las listas contienen n_1, n_2 y n_3 proyectos, respectivamente. Cada proyecto está en a lo más una lista. ¿De cuántas formas puede elegir el estudiante?

Aplicaciones más complejas

Por supuesto, las aplicaciones más interesantes de conteo se dan al combinar de manera creativa estas dos reglas.

Pero antes de mostrar ejemplos de esto será bueno presentar una regla más.

¿Qué pasa si una tarea se puede realizar o de n_1 maneras o de n_2 maneras, pero algunas de las n_1 maneras de realizarla son las mismas que las n_2 maneras de realizarla?

Entonces no podemos aplicar la regla de la suma directamente.

Pero podemos utilizar la regla de inclusión-exclusión.

Principio de Inclusión-Exclusión

Suponga que una tarea se puede realizar de n_1 maneras o de n_2 maneras, pero existen n_3 maneras de realizar la tarea que pertenecen tanto a las n_1 maneras como a las n_2 maneras. Entonces la tarea puede ser realizada de $(n_1 + n_2 - n_3)$ maneras diferentes.

Más adelante generalizaremos este principio a tareas que pueden ser realizadas de n_1 maneras o de n_2 maneras o de ... o de n_m maneras, $m \geq 1$.

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 7 sobre alfabeto $\{0,1\}$ comienzan con un 1 o terminan con 00?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 10 sobre alfabeto $\{0,1\}$ contienen 5 consecutivos 0s o 5 consecutivos 1s?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo 8 sobre alfabeto $\{0,1\}$ contienen 3 consecutivos 0s o 4 consecutivos 1s?

Ejercicio: ¿Cuántos strings de largo n sobre alfabeto $\{0,1\}$ son *palíndromes*?

Principio del palomar

Asuma que una bandada de 20 palomas vuela hasta un palomar que contiene sólo 19 agujeros. Entonces al menos un agujero contendrá a dos palomas.

Asuma que una bandada de 20 palomas vuela hasta un palomar que contiene sólo 19 agujeros. Entonces al menos un agujero contendrá a dos palomas.

Principio del Palomar

Si k *es un entero positivo, y al menos* $k + 1$ *objetos tienen que colocarse en* k *cajas, entonces existe al menos una caja que contiene al menos dos objetos.*

Veremos que este principio tan sencillo puede ser utilizado para demostrar propiedades combinatoriales interesantes.

Aplicaciones del principio del palomar

Ejemplo: En un grupo de 367 personas deben haber dos con el mismo cumpleaños.

Ejercicio: ¿Cuántos alumnos debe tener un curso para asegurarnos que existan dos alumnos con la misma nota en un examen?

Ejercicio: Sea $\{(x_i, y_i, z_i) \mid i \in [1, 9]\}$ un conjunto de 9 puntos distintos con coordenadas enteras en el espacio tridimensional. Demuestre que el punto medio de al menos un par de estos puntos tiene coordenadas enteras.

Principio del palomar generalizado

Algo aún más fuerte puede ser dicho cuando el número de objetos excede un múltiplo del número de cajas:

Principio del palomar generalizado

Si n objetos se colocan en k cajas, entonces existe al menos una caja que contiene al menos $\lceil n/k \rceil$ objetos.

Ejercicio: Explique por qué este principio es cierto.

Aplicaciones del principio del palomar generalizado

Ejemplo: Entre 100 personas hay al menos $\lceil 100/12 \rceil = 9$ personas que nacieron en el mismo mes.

Ejercicio: ¿Cuál es el mínimo número de alumnos que un curso debe tener para asegurarse que al menos 6 alumnos recibirán la misma nota, si hay 5 posibles notas?

Ejercicio: ¿Cuál es el mínimo número de cartas que se deben tomar desde un mazo para asegurarse que al menos 3 tienen la misma pinta?

Ejercicio: Asuma que un equipo juega partidos durante 30 días, que cada día juega al menos un partido, pero que en total no juega más de 45 partidos.
Demuestre que existe un período de algún número de días consecutivos en que el equipo juega exactamente 14 partidos.

Ejercicio: Asuma que un equipo juega partidos durante 30 días, que cada día juega al menos un partido, pero que en total no juega más de 45 partidos.
Demuestre que existe un período de algún número de días consecutivos en que el equipo juega exactamente 14 partidos.

Sea a_j, $j \in [1, 30]$, el número de partidos jugados por el equipo hasta el día j. Sabemos que $1 \leq a_j \leq 45$, para cada j.

Además, para cada $j \in [1, 30]$, $15 \leq a_j + 14 \leq 59$.

Aplicaciones sofisticadas del principio

Por principio del palomar, existen dos elementos iguales en la secuencia

$$a_1, a_2, \ldots, a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$$

Pero tanto $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ como $a_1 + 14, a_2 + 14, \ldots, a_{30} + 14$ son secuencias estrictamente crecientes de enteros.

Por tanto, $a_i = a_j + 14$, para algún $i, j \in [1, 30]$. Esto quiere decir que entre el día $j + 1$ y el día i ocurrieron exactamente 14 partidos.

Aplicaciones sofisticadas del principio

Ejercicio: Demuestre que toda secuencia de $n^2 + 1$ números reales distintos contiene una subsecuencia de largo $n + 1$ que es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Aplicaciones sofisticadas del principio

Ejercicio: Demuestre que toda secuencia de $n^2 + 1$ números reales distintos contiene una subsecuencia de largo $n + 1$ que es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Sea $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2+1}$ tal secuencia. Con cada $k \in [1, n^2 + 1]$ asociamos un par (i_k, d_k) tal que:

- i_k es el número de elementos en la secuencia estrictamente creciente más larga que comienza en a_k;
- d_k es el número de elementos en la secuencia estrictamente decreciente más larga que comienza en a_k.

Aplicaciones sofisticadas del principio

Asuma, por contradicción, que no existe tal secuencia. Por el principio del palomar, existen $j, k \in [1, n^2 + 1]$ tales que $j < k$, $i_j = i_k$ y $d_j = d_k$.

Asuma primero que $a_j < a_k$. Entonces una secuencia estrictamente creciente de largo $i_k + 1$ puede ser lograda partiendo desde a_j y tomando una secuencia estrictamente creciente de largo i_k que empiece en a_k. Contradicción.

El caso $a_k < a_j$ es similar.

Ejercicios finales

Ejercicio (Ramsey): Asuma que en un grupo de seis personas, cada par de personas son o amigos o enemigos. Demuestre que existen o tres mutuos amigos o tres mutuos enemigos.

Ejercicio: Demuestre que en cualquier fiesta de al menos dos personas, existen dos personas que conocen a la misma cantidad de gente en la fiesta.