UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Primavera 2009

1. Una oración de la lógica proposicional está en *CNF* si es de la forma

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (l_i^1 \vee l_i^2 \vee \cdots \vee l_i^{m_i}),$$

donde $m_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ y para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m_i$, l_i^j es una variable proposicional o su negación. Decimos que el *rango* de esta oración es $(m_1, \ldots, m_n)$.

Un *grafo* G es una tupla (N, A), donde N es un conjunto de nodos y $A \subseteq N \times N$ es un conjunto de arcos. Un grafo es *no dirigido* si cada vez que $(a, b) \in A$ se tiene que $(b, a) \in A$. El grafo G es *simple* si para todo $a \in N$ se tiene que $(a, a) \notin A$. Por último, G tiene un *clique* de tamaño k, para $k > 0$, si existen nodos distintos $a_1, \ldots, a_k$ en N tal que para cada $1 \leq i, j \leq k$, $(a_i, a_j) \in A$.

Demuestre que para toda oración ϕ en CNF de rango $(m_1, \ldots, m_n)$ es posible *construir* un grafo simple y no dirigido G_ϕ, tal que

- G_ϕ tiene a lo más $\sum_{1 \leq i \leq n} m_i$ nodos; y
- ϕ es satisfacible si y solo si G_ϕ tiene un clique de tamaño n.

Además, la construcción de G_ϕ solo puede estar basada en la forma de ϕ (es decir, en su sintaxis), y no en su semántica (es decir, la construcción no puede estar basada en si ϕ es satisfacible o no).

Solución: El grafo $G_\phi = (N, A)$ se define como sigue. El conjunto N de sus nodos es $\bigcup_{1 \leq i \leq n} \{(i, l_i^j) \mid 1 \leq j \leq m_i\}$. El conjunto A de los arcos contiene todos los pares $((i, l_i^j), (i', l_{i'}^{j'}))$ de nodos tales que $i \neq i'$ y $l_i^j \neq \neg l_{i'}^{j'}$. Es claro que el número de nodos de G_ϕ es $\sum_{1 \leq i \leq n} m_i$.

Asuma que ϕ es satisfacible. Entonces existe fila f de la tabla de verdad tal que para cada $1 \leq i \leq n$ existe $j_i \in [1, m_i]$ tal que f hace verdadero a $l_i^{j_i}$. Esto quiere decir que $\{(1, l_1^{j_1}), \ldots, (n, l_n^{j_n})\}$ es un clique de tamaño n en G_ϕ (¿por qué?).

Asuma por otro lado que G_ϕ contiene un clique $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que para cada $i \in [1, n]$, a_i representa a un literal p_i en $(l_i^1 \vee \cdots \vee l_i^{m_i})$, i.e. es de la forma (i, l_i^j). Luego, la fila f que le asigna un 1 a cada literal p_i $(1 \leq i \leq n)$ satisface a ϕ (¿por qué tal fila existe?).

2. Asuma que el dominio de discurso son los números naturales, y que contamos con (a) un predicado binario $<$ que es intepretado como el orden lineal estándar en $\mathbb{N}$, y (b) dos predicados ternarios $\cdot$ y $+$ que definen a la multiplicación y suma en $\mathbb{N}$, respectivamente.

Exprese en lógica de primer orden las siguientes propiedades de los números naturales usando solo los predicados mencionados en el párrafo anterior:

- Todo número natural positivo es par o impar, pero no ambos.
- El sucesor de todo número par es impar.
- Existe un número infinito de números primos.
- Para todo par (n, n') de números naturales positivos, existe un único par (p, c) tal que $p \geq 0$, $0 \leq c \leq n-1$ y $n' = pn + c$.

Solución: Primero definimos la relación binaria S de sucesor, y los predicados $Cero$, Uno, Dos, Par, $Impar$ y $Primo$ como sigue:

- $S(x, y) \equiv x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$.
- $Cero(x) \equiv \neg\exists y(y < x)$.
- $Uno(x) \equiv \forall y(S(y, x) \to Cero(y))$.
- $Dos(x) \equiv \forall y(S(y, x) \to Uno(y))$.
- $Par(x) \equiv \exists y\exists z(Dos(y) \wedge z \cdot y = x)$.
- $Impar(x) \equiv \forall y(S(x, y) \to \exists u\exists v(Dos(u) \wedge u \cdot v = y))$.
- $Primo(x) \equiv \forall y\forall z(y \cdot z = x \to Uno(y) \vee Uno(z))$.

Con esto podemos definir las propiedades como siguen:

- Todo número natural positivo es par o impar, pero no ambos.

  $$\forall x(Par(x) \otimes Impar(x)),$$

  donde $\alpha \otimes \beta \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$.
- El sucesor de todo número par es impar.

  $$\forall x\forall y(S(x, y) \to (Par(x) \leftrightarrow \neg Impar(y))).$$

- Existe un número infinito de números primos.

  $$\forall x(Primo(x) \to \exists y(x < y \wedge Primo(y))).$$

- Para todo par (n, n') de números naturales positivos, existe un único par (p, c) tal que $p \geq 0$, $0 \leq c \leq n-1$ y $n' = pn + c$.

  $$\begin{aligned}&\forall x\forall y\exists z\exists u\exists v\,(z \cdot y = u \wedge u + v = x \wedge v < y \wedge \\ &\qquad\qquad \forall x_1\forall y_1\forall z_1(x_1 \cdot y = y_1 \wedge y_1 + z_1 = x \wedge z_1 < y \;\to\; x_1 = z \wedge z_1 = v)).\end{aligned}$$

3. Una relación R en A es un *cuasi-orden* si es refleja y transitiva.

   - Demuestre que si R es un cuasi-orden en A, entonces $R \cap R^{-1}$ es una relación de equivalencia en A.
   - Sea S una relación en las clases de equivalencia de $R \cap R^{-1}$ tal que $(C, D) \in S$ si y solo si existen elementos $c \in C$ y $d \in D$ tal que $(c, d) \in R$. Demuestre que S es un orden parcial.

Solución: Demostramos cada item separadamente:

- Sea $a \in A$. Luego, dado que R es refleja, $(a, a) \in R$ y $(a, a) \in R^{-1}$. Por tanto, $R \cap R^{-1}$ es refleja.

  Asuma $(a, b) \in R \cap R^{-1}$. Luego, por definición, $(b, a) \in R \cap R^{-1}$. Por tanto, $R \cap R^{-1}$ es simétrica.

  Asuma finalmente que $(a, b) \in R \cap R^{-1}$ y $(b, c) \in R \cap R^{-1}$. Dado que R es transitiva, $(a, c) \in R$. Pero, dado que $R \cap R^{-1}$ es simétrica, (c, b) y (b, a) están en $R \cap R^{-1}$, y por tanto, $(c, a) \in R$. Concluimos que (a, c) también está en R^{-1}, y, por tanto, que $R \cap R^{-1}$ es transitiva.

- Es trivial demostrar que S es refleja.

  Asuma que $(C, D), (D, C) \in S$. Luego, existen $c, c' \in C$ y $d, d' \in D$ tal que $(c, d), (d', c') \in R$. Además, c y c' pertenecen a la misma clase de equivalencia con respecto a $R \cap R^{-1}$, y lo mismo es cierto de d y d'. Para demostrar que $C = D$ (i.e. que S es antisimétrica) basta demostrar que $c \in D$. Para eso basta demostrar que $(c, d) \in R \cap R^{-1}$; es decir, basta demostrar que $(c, d) \in R^{-1}$. Dado que $(c', d') \in R^{-1}$, $(c, c') \in R^{-1}$ y R^{-1} es transitiva, tenemos que $(c, d') \in R^{-1}$. Pero $(d', d) \in R^{-1}$, por lo que $(c, d) \in R^{-1}$, que e slo que queríamos demostrar.

  La demostración de que S es transitiva es similar.