

Capítulo 2: Inducción y recursión

Clase 2: El principio de Inducción Fuerte

Matemática Discreta - CC3101
Profesor: Pablo Barceló

En esta clase presentamos un nuevo principio de inducción, llamado de **inducción fuerte**, que puede ser utilizado en casos cuando la inducción tradicional es difícil de aplicar.

En esta clase presentamos un nuevo principio de inducción, llamado de **inducción fuerte**, que puede ser utilizado en casos cuando la inducción tradicional es difícil de aplicar.

Principio de Inducción Fuerte: Una propiedad P es cierta de todos los números naturales si:

- ▶ $P(1)$ es cierto, y
- ▶ para todo número natural n , si $P(j)$ es cierto para todo $j \in [1, n]$, entonces $P(n + 1)$ también es cierto.

Inducción fuerte vs Inducción usual

Claramente, la inducción fuerte nos da más flexibilidad para probar algo que la inducción tradicional:

- ▶ Podemos utilizar cualquier hipótesis inductiva previa;
- ▶ si algo se puede demostrar mediante inducción usual también se puede demostrar mediante inducción fuerte.

Mostraremos a continuación cómo la inducción fuerte puede simplificararnos la vida en algunos casos.

Ejemplo de aplicación de Inducción Fuerte

Ejercicio: Demuestre usando inducción fuerte que todo entero $n > 1$ puede ser escrito como un producto de números primos. (Y pregúntese luego si esto puede ser demostrado usando inducción usual).

(El caso base es trivial. A continuación probaremos el caso inductivo).

Ejemplo de aplicación de Inducción Fuerte

Caso inductivo: Considere el entero $k + 1$, y asuma por hipótesis inductiva que todo entero $j \in [2, k]$ puede ser escrito como un producto de primos.

Ejemplo de aplicación de Inducción Fuerte

Caso inductivo: Considere el entero $k + 1$, y asuma por hipótesis inductiva que todo entero $j \in [2, k]$ puede ser escrito como un producto de primos.

Consideramos dos casos:

- ▶ $k + 1$ es primo: Trivial.
- ▶ $k + 1$ no es primo: Existen dos enteros $j, \ell \in [2, k]$ tal que $k + 1 = j\ell$.

Por hipótesis inductiva, j y ℓ pueden ser escritos como productos de primos.

Concluimos que $k + 1$ puede ser escrito como producto de primos.

Otras formas de Inducción Fuerte

A veces es conveniente usar una forma de inducción en que el caso inductivo sólo aplica a enteros mayores que un entero dado:

Sea b un entero, y j un entero positivo. Entonces, una propiedad P de los números naturales es cierta para todo entero $n \geq b$ si:

- ▶ $P(b), P(b+1), \dots, P(b+j)$ son ciertas; y
- ▶ para todo $k \geq b+j$, si $P(\ell)$ es cierto para cada $\ell \in [b, k]$, entonces $P(k+1)$ es cierto.

Otras formas de Inducción Fuerte

A veces es conveniente usar una forma de inducción en que el caso inductivo sólo aplica a enteros mayores que un entero dado:

Sea b un entero, y j un entero positivo. Entonces, una propiedad P de los números naturales es cierta para todo entero $n \geq b$ si:

- ▶ $P(b), P(b+1), \dots, P(b+j)$ son ciertas; y
- ▶ para todo $k \geq b+j$, si $P(\ell)$ es cierto para cada $\ell \in [b, k]$, entonces $P(k+1)$ es cierto.

A continuación veremos un ejemplo de cómo aplicar este método.

Un ejemplo de esta forma de inducción

Ejercicio: Demuestre que cualquier cantidad de plata mayor o igual a 12 pesos puede ser pagada usando sólo monedas de 4 y 5 pesos.

Un ejemplo de esta forma de inducción

Ejercicio: Demuestre que cualquier cantidad de plata mayor o igual a 12 pesos puede ser pagada usando sólo monedas de 4 y 5 pesos.

Para el caso base demostramos que esto es cierto para los casos 12, 13, 14 y 15.

Caso inductivo: La hipótesis inductiva nos dice que la propiedad es cierta para todo $j \in [12, k]$, donde k es un entero mayor o igual a 15.

Queremos demostrar la propiedad para $k + 1$: Dado que $k \geq 15$, por hipótesis inductiva la propiedad es cierta para $k - 3$.

Luego $k - 3$ puede ser formado usando sólo monedas de 4 y 5 pesos. Por tanto, agregando una moneda de 4 pesos obtenemos la cantidad de $k + 1$.

Una comparación interesante

Ejercicio: Resuelva el ejercicio anterior utilizando inducción usual.

Inducción Fuerte en Geometría Computacional

Demostraremos mediante inducción fuerte que todo polígono **simple** con n lados, $n \geq 3$, puede ser **triangulado** en $n - 2$ triángulos.

Un polígono es **simple** si cualquiera de sus lados no consecutivos no se intersectan.

Una **diagonal** de un polígono es una línea que conecta a dos de sus vértices no consecutivos.

El proceso de **triangulación** de un polígono se obtiene al dividir a un polígono en triángulos al agregar diagonales que no se intersecten.

Un resultado fundamental de la Geometría Computacional es que todo polígono simple puede ser triangulado. Aquí demostraremos algo aún más fuerte.

Inducción Fuerte en Geometría Computacional

Para demostrar esto necesitaremos un resultado intermedio.

Decimos que una diagonal es **interior** si está totalmente contenida en el polígono.

Lemma

Todo polígono simple con al menos 4 lados tiene al menos una diagonal interior.

Inducción Fuerte en Geometría Computacional

Para demostrar esto necesitaremos un resultado intermedio.

Decimos que una diagonal es **interior** si está totalmente contenida en el polígono.

Lemma

Todo polígono simple con al menos 4 lados tiene al menos una diagonal interior.

¿Es esto evidente? ¿Podría demostrarlo?

Inducción Fuerte en Geometría Computacional

Demostraremos por inducción fuerte que para todo $n \geq 3$, si un polígono simple tiene n lados entonces puede ser triangulado en $n - 2$ triángulos.

El caso base es trivial.

A continuación probaremos el caso inductivo.

Inducción Fuerte en Geometría Computacional

Sea P un polígono con $n + 1$ lados, $n \geq 3$. Por el lema anterior, P tiene una diagonal interior ab . Por tanto, ab divide a P en dos polígonos simples Q y R .

Asuma Q tiene s lados y R tiene t lados. Claramente, $s, t \in [3, n]$. Además, $n + 1 = s + t - 2$.

Por hipótesis inductiva, Q puede ser triangulado en $s - 2$ triángulos y R puede ser triangulado en $t - 2$ triángulos.

Se sigue que P puede ser triangulado en $(s - 2) + (t - 2) = n - 1$ triángulos

Lemma

Todo polígono simple con al menos 4 lados tiene al menos una diagonal interior.

Sea P un polígono simple con al menos 4 lados. Sea b el punto del polígono con la menor coordenada y entre los vértices con menor coordenada x . Por tanto, b es un vértice de P .

Sean a y c los vértices adyacentes a b en P . El ángulo formado por ab y bc debe ser menor a 180° (si no habría un vértice de P con menor coordenada x que a).

Sea T el triángulo $\triangle abc$. Si este triángulo no contiene vértices de P (adentro o en su borde) entonces ac es una diagonal interior.

Demostración del lemma

Asuma entonces que $\triangle abc$ contiene vértices de P (adentro o en su borde).

Buscaremos un punto p que pertenece a $\triangle abc$, y tal que p es un vértice de P y bp es una diagonal interior de P .

¿Cómo elegir tal punto p ?

Demostración del lemma

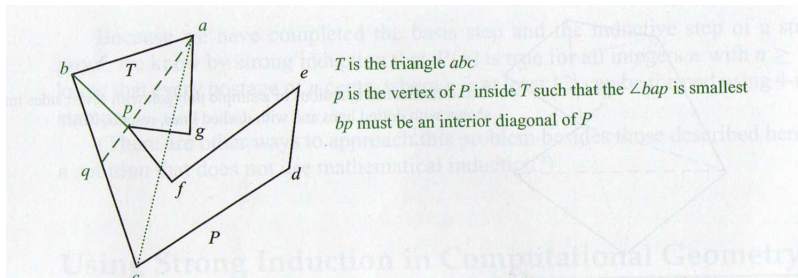
Asuma entonces que $\triangle abc$ contiene vértices de P (adentro o en su borde).

Buscaremos un punto p que pertenece a $\triangle abc$, y tal que p es un vértice de P y bp es una diagonal interior de P .

¿Cómo elegir tal punto p ?

Basta elegir el vertice p tal que el ángulo $\angle bap$ sea el menor entre todos los posibles.

Ilustración de la demostración



Principio del Buen Orden

Se puede probar que algo es cierto de cada número natural también utilizando el siguiente principio (axioma):

Principio del buen orden: Todo conjunto no vacío de números naturales positivos tiene un menor elemento.

Mostraremos cómo el principio del buen orden puede ser utilizado.

Aplicación del Principio del Buen Orden

Ejercicio: En un **torneo** cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez, y cada juego entrega un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores $p_1, p_2, \dots, p_m$ forman un **ciclo** si p_1 le gana a p_2 , p_2 le gana a p_3 , $\dots$, p_{m-1} le gana a p_m , y p_m le gana a p_1 .

Use el principio del buen orden para demostrar que si hay un ciclo $p_1, p_2, \dots, p_m$ ($m \geq 3$) en un torneo entonces hay un ciclo de largo 3.

Aplicación del Principio del Buen Orden

Asuma, por contradicción, que no hay ciclo de largo 3.

Dado que existe al menos un ciclo, el conjunto de todos los enteros positivos n tales que existe un ciclo de largo n es no vacío. Por el principio del buen orden, este conjunto tiene un menor elemento $k > 3$.

Sea $p_1, p_2, \dots, p_k$ un ciclo de largo k .

Considere jugadores p_1, p_2 y p_3 . Entonces p_1 le ganó a p_3 (si no habría ciclo de largo 3).

Pero entonces $p_1, p_3, \dots, p_{k-1}$ es también un ciclo, esta vez de largo $k - 1$. Contradicción.

Principio del buen orden vs Inducción

Tanto el principio del buen orden como los principios de inducción que hemos visto son **postulados** acerca de los naturales:

- ▶ No pueden demostrarse sino que son parte de la definición de los números naturales.

Como vimos anteriormente, si el principio de inducción fuerte es cierto entonces el principio de inducción es cierto.

Además,

Proposición

Si el principio del buen orden es cierto sobre los enteros positivos entonces el principio de inducción fuerte también es cierto sobre los enteros positivos.

Principio del buen orden vs Inducción

Quizás más sorprendentemente,

Proposición

Si el principio de inducción es cierto sobre los enteros positivos entonces el principio del buen orden es también cierto sobre los enteros positivos.

Principio del buen orden vs Inducción

Quizás más sorprendentemente,

Proposición

Si el principio de inducción es cierto sobre los enteros positivos entonces el principio del buen orden es también cierto sobre los enteros positivos.

Concluimos lo siguiente:

Teorema

Los siguientes postulados son equivalentes sobre los enteros positivos:

- ▶ *Principio del buen orden.*
- ▶ *Principio de inducción fuerte.*
- ▶ *Principio de inducción.*