Auxiliar 2 - Lógica Proposicional y de Predicados

Cátedra: Matemáticas Discretas
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero

12 de Agosto del 2009

1. Decimos que una fórmula ϕ está en CNF si es de la forma

$$\bigwedge_{i=1}^m \bigvee_{j=1}^{n_i} l_{ij}$$

donde los l_{ij} son literales, es decir, una variable proposicional o la negación de alguna variable. Decimos que ϕ está en 3-CNF si $n_i = 2 \quad \forall i \in \{1..m\}$. Sea $P = \{p, q, r, s\}$ variables proposicionales. Pruebe que existe una fórmula tal que no es equivalente a ninguna fórmula en 3-CNF.

2. Sea P un conjunto arbitrario de variables proposicionales. Un conjunto de fórmulas Σ se dice finitamente satisfacible si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible. Se sigue de la definición que si Σ es finito, el hecho de ser finitamente satisfacible es equivalente a ser satisfacible, pero si Σ es infinito, no es directo que sea así (aunque se puede demostrar que sí lo es).

Sea Σ un conjunto de fórmulas en $L(P)$, tal que Σ es finitamente satisfacible. Demuestre que para cualquier fórmula $\alpha \in L(P)$, se tiene que $\Sigma \cup \{\alpha\}$ es finitamente satisfacible o $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$ es finitamente satisfacible.

3. Sea P un conjunto finito de variables proposicionales y Σ un conjunto infinito de oraciones. Demuestre que Σ es finitamente satisfacible si y sólo si Σ es satisfacible.

4. Un clique es un grafo G tal que para todo par de nodos u, v en G se tiene que existe un arco entre ellos.

Demuestre que para cada fórmula ϕ en 3-CNF se puede encontrar un grafo G_ϕ y un entero k_ϕ , tal que ϕ es satisfacible si y sólo si G_ϕ contiene un clique de tamaño k_ϕ .

5. (a) Dé una oración ϕ_n , que sea satisfecha cuando el dominio del discurso tenga al menos n elementos.
(b) Dé una oración que sea satisfecha cuando el dominio del discurso tenga exactamente n elementos.

6. Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar la noción de adyacencia en grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una oración de la lógica de primer orden que represente la propiedad mencionada.

- (a) El grafo es un clique.
- (b) El grafo contiene un vertex cover con 3 nodos.
- (c) El grafo contiene un independiente con 3 nodos.
- (d) El grafo tiene un único nodo aislado.
- (e) Todo nodo en el grafo tiene grado 2.

7. Sea P un predicado binario. Sea ϕ la fórmula:

$$\forall x \exists y P(x, y) \quad \wedge \quad \forall x \forall y_1 \forall y_2 ((P(x, y_1) \wedge P(x, y_2)) \rightarrow y_1 = y_2) \quad \wedge$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y ((P(x_1, y) \wedge P(x_2, y)) \rightarrow x_1 = x_2) \quad \wedge \quad \neg \forall y \exists x P(x, y)$$

- (a) Demuestre que existe un dominio y una relación binaria en este dominio tal que ϕ es verdadera ahí.
- (b) Demuestre que ϕ es falsa en cualquier dominio finito.