# Capítulo 1: Fundamentos: Lógica y Demostraciones

## Clase 3: Relaciones, Funciones, y Notación Asintótica

Matemática Discreta - CC3101

Profesor: Pablo Barceló

# Relaciones

Sean $A$ y $B$ conjuntos. Una relación entre $A$ y $B$ es un subconjunto de $A \times B$.

O en otros términos, es un conjunto $R$ de pares $(a, b)$ tal que $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo: Sea $C$ el conjunto de ciudades de Chile, y $D$ el conjunto de regiones de Chile.

Entonces, la relación está_en contiene todos los pares $(c, d) \in C \times D$ tal que la ciudad $c$ está en la región $d$.

# Relación sobre un conjunto

Si $A$ es un conjunto, entonces una relación en $A$ es una relación entre $A$ y $A$.

Ejemplo: Las siguiente son relaciones en $\mathbb{N}$

$$\{(a,b) \mid a \leq b\}, \qquad \{(a,b) \mid a+b \leq 3\}$$

Ejercicio: ¿Cuántas relaciones existen en un conjunto con $n$ elementos?

# Propiedades de las relaciones

Una relación $R$ en un conjunto $A$ es:

- refleja: $(a, a) \in R$, para todo $a \in A$;
- simétrica: $(a, b) \in R$ implica $(b, a) \in R$, para todo $a, b \in A$;
- antisimétrica: $(a, b) \in R$ y $(b, a) \in R$ implica $a = b$, para todo $a, b \in A$;
- transitiva: $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$ implica $(a, c) \in R$, para todo $a, b, c \in A$.

Ejercicio: Exprese estas propiedades en lógica de predicados.

Ejercicio: Estudie algunas relaciones en $\mathbb{N}$ con respecto a cuáles de estas propeidades satisfacen.

# Operaciones en relaciones

Típicas operaciones en relaciones:

- unión: $R \cup R'$;
- intersección: $R \cap R'$;
- diferencia: $R - R'$;
- inverso: $R^{-1}$;
- composición: $R \circ R' = \{(a, c) \mid (a, b) \in R, (b, c) \in R'\}$.

Sea $R$ relación en $A$. Definimos $R^n$, $n \geq 1$, como sigue:

$$R^1 = R \quad \text{y} \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

# Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que la relación $R$ en $A$ es transitiva si y sólo si $R^n \subseteq R$, para cualquier $n \geq 1$.

Ejercicio: Demuestre que $R$ es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ejercicio: Sea $R$ simétrica. Demuestre que $R^n$ es simétrica, para todo $n \geq 1$.

# Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que la relación $R$ en $A$ es transitiva si y sólo si $R^n \subseteq R$, para cualquier $n \geq 1$.

Ejercicio: Demuestre que $R$ es simétrica si y sólo si $R = R^{-1}$.

Ejercicio: Sea $R$ simétrica. Demuestre que $R^n$ es simétrica, para todo $n \geq 1$.

Pregunta: ¿En qué área de la computación las relaciones son de particular importancia?

# Clausuras

La clausura transitiva $R^*$ de $R$ es la menor relación $R'$ que contiene a $R$ y tal que $R'$ es transitiva.

Equivalentemente podríamos definir las clausuras refleja y simétrica de $R$.

Ejemplo: La clausura transitiva de la relación de sucesor en los números naturales es la relación de orden.

La clausura refleja de la relación $<$ en los números naturales es la relación $\leq$.

# Clausura transitiva

Intuitivamente, $(a, b) \in R^*$ si y sólo si existen elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, tal que

$$(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, b)$$

es una secuencia de pares en $R$.

Si representamos $R$ como un grafo, entonces $R^*$ contiene todos aquellos pares $(a, b)$ tal que existe camino desde $a$ hasta $b$ en ese grafo.

Ejercicio: Demuestre que si $A$ tiene $n$ elementos, entonces $R^* = \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$.

# Relaciones de equivalencia

Una relación $R$ en $A$ es de equivalencia si es refleja, simétrica, y transitiva.

Ejemplo: Sea $p \geq 2$. Entonces la relación $\equiv_p$ de congruencia módulo $p$ es una relación de equivalencia.

- Recuerde que $a \equiv_p b \Leftrightarrow p$ divides $(a - b)$.

Ejercicio: Sea $R$ una relación simétrica y transitiva, tal que para cada $a \in A$ existe $b \in A$ tal que $(a, b) \in R$. Demuestre que $R$ es de equivalencia.

# Clases de equivalencia

Para $a \in A$, denotamos por $[a]_R$ a la clase de equivalencia de $a$ con respecto a la relación de equivalencia $R$. Esta se define como $\{b \mid (a, b) \in R\}$.

Ejemplo: $[1]_{\equiv_p} = \{1, 1 + p, 1 + 2p, 1 + 3p, \dots\}$.

Ejercicio: Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes:

- $(a, b) \in R$;
- $[a]_R = [b]_R$;
- $[a]_R \cap [b]_R \neq \emptyset$.

Ejercicio: Demuestre que $\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$.

# Ordenes parciales

Una relación $R$ en $A$ es un orden parcial si es refleja, antisimétrica, y transitiva.

Ejemplo: $\leq$ es un orden parcial en $\mathbb{N}$.

Ejercicio: Demuestre que la relación de divisibilidad es un orden parcial en $\mathbb{N} \setminus 0$.

Ejercicio: Demuestre que $\subseteq$ es un orden parcial en $2^S$, para cualquier conjunto $S$.

Comúnmente denotamos los ordenes parciales como $(A, \preceq)$.

# Ordenes totales

Un orden parcial $(A, \preceq)$ es, además, total si para cada $a, b \in A$ se tiene que $a \preceq b$ o $b \preceq a$.

Ejemplo: $(\mathbb{Z}, \leq)$ es un orden total.

Sea $(A, \preceq)$ un orden total. Decimos que $\preceq$ es un buen orden en $A$, si cada $A' \subseteq A$ tiene un menor elemento con respecto a $\preceq$.

Ejemplo: La relación $\leq$ en $(\mathbb{Z}, \leq)$ no es un buen orden.

Ejercicio: Demuestre que la relación $\preceq$ en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$ definida por

$$(a_1, a_2) \preceq (b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 < b_1, \text{ o } a_1 = b_1 \text{ y } a_2 \leq b_2,$$

es un buen orden en $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$.

# Inducción

Demuestre el siguiente teorema:

Teorema (Inducción bien ordenada): Sea $A$ un conjunto que tiene un buen orden $\preceq$. Entonces la propiedad P es cierta para todo elemento $a \in A$, si:

Inducción: Para todo $b \in A$, si $P$ es cierto para todo $a \in A$ tal que $a \preceq b$ pero $a \neq b$, entonces $P$ es cierto en $b$.

Este resultado justifica la utilización del método inductivo en los naturales.

Y además explica porque no podemos utilizar el mismo método en los enteros.

# Funciones

Una función entre $A$ y $B$ es una relación $R$ entre $A$ y $B$, tal que:

- Para todo $a \in A$ existe $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$;
- para todo $a \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(a, b') \in R$, entonces $b = b'$;

Escribimos $f : A \to B$ para denotar a una función, y $f(a) = b$ para denotar que el par $(a, b)$ está en la relación que representa a la función.

El dominio de $f$ es $A$, y su codominio es $B$.

Si $f(a) = b$ decimos que $b$ es la imagen de $a$, y $a$ la preimagen de $b$.

El rango de $f$ es el conjunto $\{b \in B \mid f(a) = b, \text{para algún } a \in A\}$.

# Funciones uno-a-uno y sobre

Una función $f : A \to B$ es:

- Uno-a-uno o inyectiva: si para todo $a, b \in A$, $a \neq b$ implica $f(a) \neq f(b)$;
- Sobre o sobreyectiva: si para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$;
- Biyectiva: si es uno-a-uno y sobre.

Ejemplo:

- La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(n) = 2n$ es uno-a-uno, pero no es sobre.
- La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $f(0) = 1$ y $f(n) = n - 1$, para todo $n > 0$, es sobre pero no uno-a-uno.

# Funciones inversas

Sea $f : A \to B$ una función biyectiva. Entonces la función inversa $f^{-1} : B \to A$ se define como $f^{-1}(b) = a \leftrightarrow f(a) = b$.

Pregunta: ¿Por qué pedimos que $f$ sea biyectiva?

Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$. La composición de $g$ y $f$, denotada por $g \circ f$, es una función de $A$ en $C$ tal que $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Nota: $f^{-1} \circ f$ es la función identidad, asumiendo que $f$ es biyectiva.

# Ejercicios

Ejercicio: ¿Es cierto que si $f$ y $f \circ g$ son uno-a-uno, entonces $g$ es uno-a-uno?

Ejercicio: Lo mismo para funciones sobre.

# Funciones importantes

La función techo asigna a cada número real $x$ el valor $\lceil x \rceil$ del menor entero $y$ tal que $x \leq y$.

La función piso asigna a cada número real $x$ el valor $\lfloor x \rfloor$ del mayor entero $y$ tal que $x \geq y$.

La función factorial asigna a cada número natural $n$ el producto $n!$ de los primeros $n$ enteros positivos (asumimos que $0! = 1$).

# Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que para todo número real $x$ y entero $n$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Ejercicio: Demuestre que para todo número real $x$, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Ejercicio: Demuestre que para todo número real $x$, $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$.

# Crecimiento de funciones

Describimos el crecimiento de funciones utilizando la notación $O$.

Sean $f$ y $g$ definidas desde $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Decimos que $f(x)$ es $O(g(x))$ si existen constantes $c$ y $k$ tal que

$$f(x) \leq c \cdot g(x), \quad \text{para todo } x > k.$$

Ejercicio: Demuestre que $f(x) = x^2 + 2x + 1$ es $O(x^2)$.

Ejercicio: En general, demuestre que todo polinomio de grado $n$ con coeficientes reales es $O(x^n)$.

# Ejercicios

Ejercicio: Demuestre que no existe polinomio de grado $n > 1$ que sea $O(x^{n-1})$.

Ejercicio: Utilize la notación $O$ para estimar el tamaño de $\sum_{i=1}^{n} i$ y de $n!$.

# Crecimiento de funciones combinadas

Si tenemos un algoritmo que se compone de dos subprocedimientos, ¿cómo podemos estimar la complejidad de tal algoritmo?

**Teorema**

*Si* $f_1$ *es* $O(g_1(x))$ *y* $f_2$ *es* $O(g_2(x))$, *entonces*

- $f_1(x) + f_2(x)$ *es* $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$.
- $f_1(x) \cdot f_2(x)$ *es* $O(g_1(x) \cdot g_2(x))$.

Ejercicio: Demuestre el teorema.

Ejercicio: Encuentre una (buena) estimación del crecimiento de la función $(x+1)\log(x^2+1) + 3x^2$.

# Otras notaciones

Decimos que $f(x)$ es $\Omega(g(x))$ si y sólo si $g(x)$ es $O(f(x))$.

Decimos que $f(x)$ es $\Theta(g(x))$ (o $f(x)$ es de orden $g(x)$), si y sólo si $f(x)$ es $O(g(x))$ y $g(x)$ es $O(f(x))$.

Ejercicio: Demuestre que $n \log n$ es $\Theta(\log n!)$.