Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación

Semestre Primavera 2009
Matemáticas Discretas
CC3101

Profesor:Pablo Barceló
Auxiliares: Gonzalo Ríos, Miguel Romero
Fecha: 05 de Agosto

Auxiliar 1: Lógica Proposicional

1 Materia

1. Alfabeto
   (a) Variables proposicionales (P): p, q, r ,...
   (b) Conectivos lógicos: $\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow$
   (c) Símbolos de puntuación: (,)

2. Lenguaje de las fórmulas proposicionales

   L(P) es el menor conjunto que satisface las siguientes reglas:
   (a) P$\subseteq L(P)$
   (b) Si $\varphi \in$ L(P), entonces $(\neg\varphi) \in$ L(P).
   (c) Si $\varphi, \psi \in$ L(P), entonces $(\varphi * \psi)$, con $* \in \{\vee, \wedge, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$

3. Semántica
   (a) Valuación (asignación): $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$
   (b) Extensión: $\hat{\sigma} : L(P) \rightarrow \{0, 1\}$. Dada $\varphi \in$ L(P)
      i. si $\varphi = p$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \sigma(p)$
      ii. si $\varphi = (\neg\alpha)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = 1 - \hat{\sigma}(\varphi)$
      iii. si $\varphi = (\alpha \wedge \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \min(\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      iv. si $\varphi = (\alpha \vee \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \max(\hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      v. si $\varphi = (\alpha \longrightarrow \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \max(1 - \hat{\sigma}(\alpha), \hat{\sigma}(\beta))$
      vi. si $\varphi = (\alpha \longleftrightarrow \beta)$, entonces $\hat{\sigma}(\varphi) = \begin{cases} 1 & si \quad \hat{\sigma}(\alpha) = \hat{\sigma}(\beta) \\ 0 & si \quad \hat{\sigma}(\alpha) \neq \hat{\sigma}(\beta) \end{cases}$

4. Definiciones previas
   (a) Una fórmula φ es satisfacible si existe σ tal que $\sigma(\varphi) = 1$
   (b) Una fórmula φ es tautología si su negación es insatisfacible.
   (c) Para un conjunto de fórmulas $\sum$ escribimos $\sigma(\sum) = 1$ si para toda fórmula φ en $\sum$ se tiene que $\sigma(\varphi) = 1$

5. Consecuencia lógica

   La fórmula φ es consecuencia lógica de $\sum$ si para toda valuación σ:
   $$\sigma(\textstyle\sum) = 1 \Longrightarrow \sigma(\varphi) = 1$$
   Esto lo denotamos $\sum \models \varphi$

6. Dos fórmulas φ y ψ son equivalentes, denotado $\varphi \equiv \psi$, si $\varphi \models \psi$ y $\psi \models \varphi$. De la misma forma, si para toda valuación σ,
   $$\sigma(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\varphi) = 1$$

7. Un conjunto de conectivos lógicos es funcionalmente completo si se puede representar cualquier tabla de verdad usando solo esos conectivos

   Ejemplo: $\{\vee, \wedge, \neg\}$

8. Teoremas Importantes de Satisfacibilidad

   (a) (Monotonía) Si $\sum \models \varphi,$ entonces para cada fórmula θ se tiene que $\sum \cup \{\theta\} \models \varphi$
   (b) $\sum \models \varphi$ si y solo sí $\sum \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible
   (c) Para todo conjunto finito de fórmulas $\sum$ y fórmula ϕ existe α tal que $\sum \models \phi$ si y solo α es tautología.
   (d) $\sum$ es insatisfacible si y solo sí para cada fórmula ϕ, $\sum \models \phi$
   (e) $\sum$ es insatisfacible si y solo sí para cada fórmula insatisfacible ϕ, $\sum \models \phi$

2 Ejercicios

1. Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

   "Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

2. Demuestre que existen Σ, α tal que $\Sigma \not\models \alpha$ y $\Sigma \not\models \tilde{}\alpha$

3. Dado $\alpha, \beta \in$ L(P), demuestre que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ si y sólo si $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$

4. Dado $\sum \subset$L(P) y $\varphi, \psi, \theta \in$ L(P), demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es tautología, entonces $\sum \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ *si* y solo si $\sum \cup \{\varphi\} \models \theta$

5. Dado $\sum = \{\tilde{}p \vee q, r \vee \tilde{}p, r \vee q\}$ y $\phi = \tilde{}p \vee (q \wedge r)$, demuestre que $\sum \models \phi$