Auxiliar N°3 CC3001, Primavera 2009

Profesor: Benjamín Bustos
Auxiliares: Juan Manuel Barrios, Felipe Garrido

13/08/2009

Problema 1

$$X_{n+1} = X_n + \log_2(n+1)$$
$$X_0 = 0$$

Para resolver esta ecuación de recurrencia la desenrrollamos.

$$X_{n+1} = X_n + \log_2(n+1) = X_{n-1} + \log_2(n) + \log_2(n+1) = \cdots$$
$$\cdots = X_{n-2} + \log_2(n-1) + \log_2(n) + \log_2(n+1)$$
$$\vdots$$
$$X_{n+1} = \underbrace{X_0}_{0} + \sum_{i=1}^{n+1} \log_2(i)$$

En este punto se puede utilizar la aproximación de Stirling o bien, dejarlo expresado de manera exacta

$$X_n \approx n \log_2(n) - n$$

o bien

$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} \log_2(i) = \log_2\left(\prod_{i=1}^{n+1} i\right)$$
$$X_n = \log_2(n!)$$

Problema 2

$$X_{n+1} = 2X_n + 1$$
$$X_0 = 0$$

Desenrollando

$$X_n = 2X_{n-1} + 1 = 2(2X_{n-2} + 1) + 1 = 4X_{n-2} + 3$$
$$X_n = 4(2X_{n-3} + 1) + 3 = 8X_{n-3} + 7$$
$$X_n = 8(2X_{n-4} + 1) + 7 = 16X_{n-4} + 15$$
$$\vdots$$
$$X_n = 2^n \underbrace{X_0}_{0} + \sum_{i=1}^{n-1} 2^i = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

Recurrencia Lineal

La ecuación planteada no es homogénea, sin embargo, si se desplaza en 1 y luego se resta a la original se tiene

$$X_{n+2} - 3X_{n+1} + 2X_n = 0$$

La cual si es homogénea y se puede resolver suponiendo $X_n = \lambda^n$. Luego

$$\lambda^{n+2} - 3\lambda^{n+1} + 2\lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

Pero sabemos que la solución trivial ($\lambda = 0$) no nos sirve, pues la ecuación planteada proviene de la complejidad para un problema (Torres de Hanoi) y no tiene sentido que sea 0, por lo que la descartamos y nos queda

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

del cual se obtienen $\lambda_- = 1$ y $\lambda_+ = 2$ por lo tanto, la solución queda

$$X_n = \alpha 2^n + \beta$$

para obtener la solución necesitamos otra condición inicial, la cual se obtiene por medio de la recurrencia: $X_1 = X_0 + 1 = 1$. Entonces

$$X_0 = \alpha + \beta \Rightarrow \alpha = -\beta$$

$$X_1 = 2\alpha - \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego

$$X_n = 2^n - 1$$

Problema 3

$$X_{n+1} = \sqrt{X_n X_{n-1}}$$
$$X_0 = 1$$
$$X_1 = 2$$

Esta ecuación no es lineal, mas si se aplica log a ambos lados se obtiene

$$\log(X_{n+1}) = \frac{1}{2}(\log(X_n) + \log(X_{n-1}))$$

Definimos $Y_n = \log(X_n)$

$$Y_{n+1} - \frac{1}{2}Y_n - \frac{1}{2}Y_{n-1} = 0$$

La cual es una ecuación lineal y homogénea, por lo tanto suponeos $Y_n = \lambda^n$

$$\lambda^{n+2} - \frac{1}{2}\lambda^{n+1} - \frac{1}{2}\lambda^n = 0$$

Descartamos la solución trivial

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

obtenemos las raíces del polinomio, las cuales son $\lambda_- = -\frac{1}{2}$ y $\lambda_+ = 1$, también es necesario aplicar el cambio de variable a las condiciones iniciales

$$Y_0 = log(\underbrace{X_0}_{1}) = 0$$

$$Y_1 = log(\underbrace{X_1}_{2}) = 1$$

Y obtenemos la solución general por superposición

$$Y_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Aplicamos las condiciones iniciales

$$Y_0 = \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$Y_1 = \alpha + \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$$

Entonces

$$Y_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

y al volver en el cambio de variable se tiene

$$X_n = 2^{\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Problema 4 (P1 parte 1, Control 1 Primavera 2007)

$$T(n) = 5T(n-1) - 4T(n-2)$$
$$T(1) = 3$$
$$T(2) = 15$$

Suponemos $T(n) = \lambda^n$

$$\lambda^n - 5\lambda^{n-1} + 4\lambda^{n-2} = 0$$

Descartamos la solución trivial ($\lambda = 0$), para poder deshacernos de λ^{n-2}

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

Obtenemos las raíces del polinomio $\lambda_- = 1$ y $\lambda_+ = 4$, luego

$$T(n) = \alpha + \beta(4)^n$$

Imponemos las condiciones iniciales

$$T(1) = \alpha + 4\beta = 3 \Rightarrow \alpha = 3 - 4\beta$$

$$T(2) = (3 - 4\beta) + 16\beta = 15 \Rightarrow \beta = 1$$

Por lo tanto

$$T(n) = 4^n - 1$$