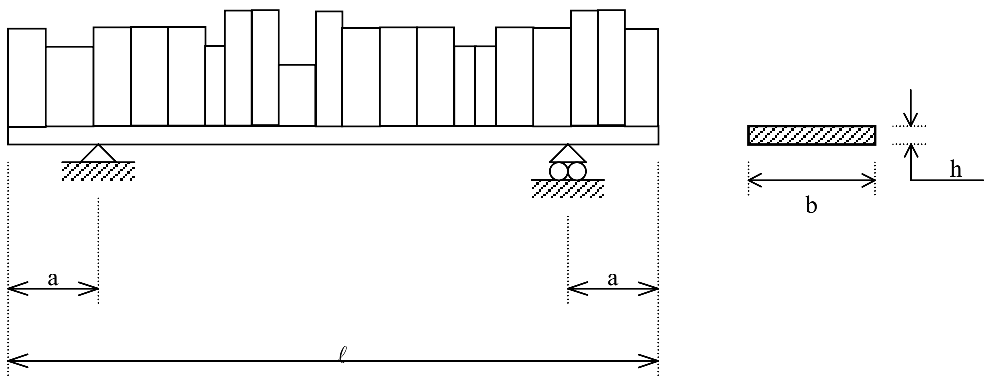
Problema 5.3

Un estudiante ha decidido instalar un estante para colocar sus libros y apuntes. Los ha colocado uno junto al otro y ha medido la longitud total de estante que necesita y la anchura que debe tener. Al ir a comprar el estante ve que para estas dimensiones puede escoger varios espesores distintos. No sabe cuál escoger. Entonces recurre a un amigo suyo que está haciendo 3er curso de Ingeniería Industrial y le expone el problema:
He decidido instalar un estante para libros, según el croquis de la figura:



$\ell = 100$ cm $\quad a = 15$ cm $\quad b = 20$ cm $\quad p_{libros\ y\ apuntes} = 0{,}6$ Kg/cm

En la tienda me han informado de que la madera de los estantes tiene las siguientes características mecánicas:

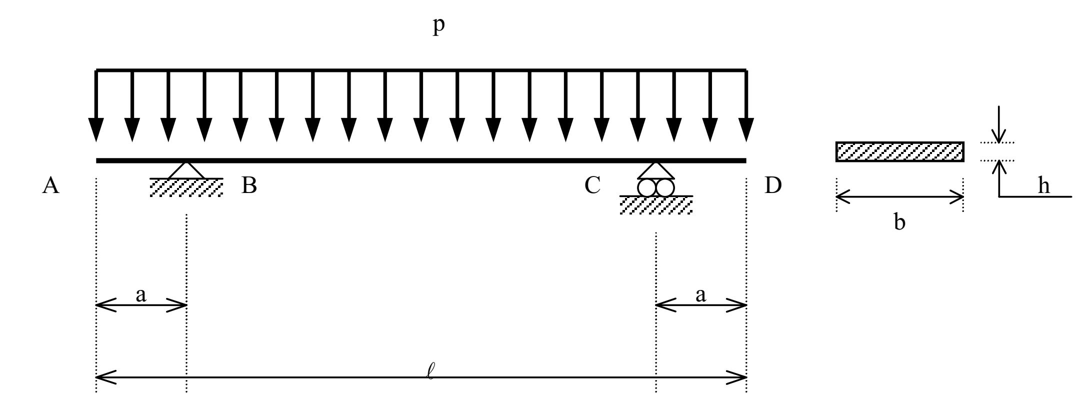
$$\sigma_{adm} = 4 \text{ N/mm}^2 \qquad E = 10\,000 \text{ N/mm}^2$$

La cuestión es:

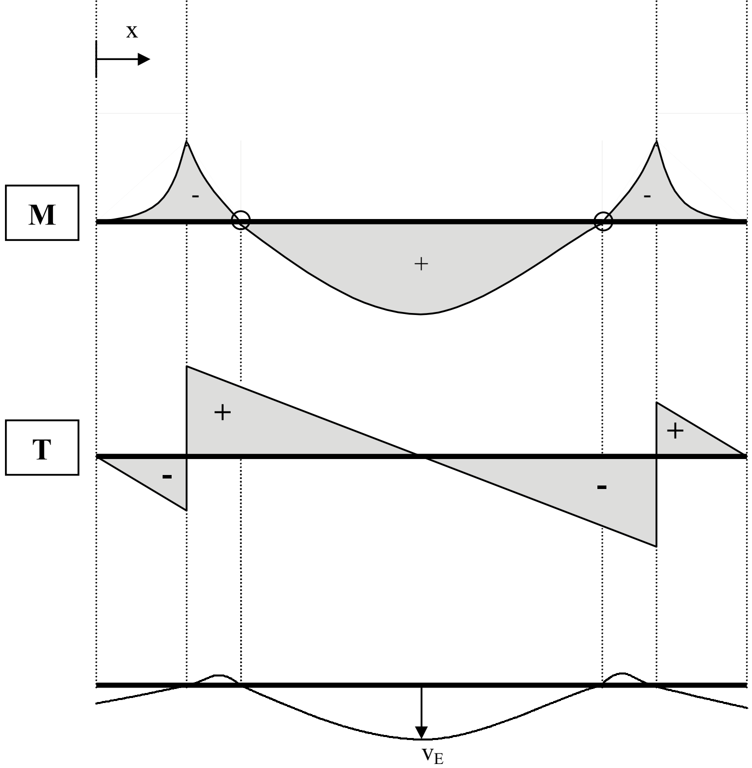
a) ¿De qué espesor *h* mínimo debo colocar el estante?
b) Los dos apoyos los he colocado, simétricamente, a una distancia *a* = 15 cm del extremo por razones puramente estéticas. Pero, atendiendo a razones de comportamiento resistente, ¿cuál sería la distancia óptima de los apoyos a los extremos, que podría minimizar el espesor *h* del estante?
c) Finalmente, me preocupa saber cuál será la flecha que tendrá el estante, una vez cargado, en su punto central (con la distancia *a* inicial).

Resolución:

a) Determinación de *h* mínima.



$$R_B = R_C = \frac{p\ell}{2}$$



Tramo AB:

$$M = -p\frac{x^2}{2}$$

$$M_A = 0 \quad M_B = -p\frac{a^2}{2}$$

$$T = -p \cdot x$$

$$T_A = 0 \qquad T_B = -p \cdot a$$

Tramo BC:

$$M = -p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a) \quad \Rightarrow \qquad M_B = -p\frac{a^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(a-a) = -p\frac{a^2}{2}$$

$$M_C = M_B = -p\frac{a^2}{2}$$

$$\left(x_E = \frac{\ell}{2}\right) \qquad M_E = -p\frac{\ell^2}{8} + p\frac{\ell^2}{4} - p\frac{\ell \cdot a}{2} = p\frac{\ell^2}{8} - p\frac{\ell \cdot a}{2}$$

$$T=-p\cdot x+p\frac{\ell}{2} \qquad T_B=-p\cdot a+p\frac{\ell}{2}$$

$$T_C=-p\cdot(\ell-a)+p\frac{\ell}{2}=p\cdot a-p\frac{\ell}{2}$$

Tramo CD:

$$M=-p\frac{x^2}{2}+p\frac{\ell}{2}(x-a)+p\frac{\ell}{2}(x-(\ell-a))=-p\frac{x^2}{2}+p\frac{\ell}{2}(x-a+x-\ell+a)$$

$$M=-p\frac{x^2}{2}+p\frac{\ell}{2}(2x-\ell) \qquad M_C=-p\frac{(\ell-a)^2}{2}+p\frac{\ell}{2}(2(\ell-a)-\ell)=-p\frac{a^2}{2}$$

$$M_D=-p\frac{\ell^2}{2}+p\frac{\ell}{2}(2\ell-\ell)=0$$

$$T=-p\cdot x+p\cdot\ell \qquad T_C=-p(\ell-a)+p\cdot\ell=p\cdot a$$

$$T_D=-p\cdot\ell+p\cdot\ell=0$$

Con ℓ = 100 cm, a = 15 cm y p = 0,6 Kg/cm, tenemos los siguientes resultados:

$$M_B=M_C=-112{,}5\cdot p=-67{,}5\ \text{cmKg}$$

$$M_E=500\cdot p=300\ \text{cmKg}$$

$$\sigma_{\text{máx}}=\frac{|M_{\text{máx}}|}{W_z}=\frac{M_E}{W_z}\leq\sigma_{adm}=40{,}77\ \text{Kg/cm}^2 \quad\Rightarrow\quad W_{z,\text{mín}}=\frac{M_E}{40.77}-\frac{b\cdot h^2}{6}$$

$$\underset{(b=20)}{\Rightarrow}\quad h_{\text{mín}}=\sqrt{\frac{M_E\cdot 6}{40{,}77\cdot 20}}\quad\Rightarrow\quad h_{\text{mín}}=1{,}49\ \text{cm}$$

b) Determinación de la distancia *a* óptima.

Óptimo resistente:

$$|M_{\text{máx}\,-}|=|M_{\text{máx}\,+}|$$

$$\Downarrow$$

$$|M_B|=|M_E|$$

$$\Downarrow$$

$$p\frac{a^2}{2}=p\frac{\ell^2}{8}-p\frac{a\cdot\ell}{2}$$

$$a^2 + \ell \cdot a - \frac{\ell^2}{4} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = -\frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + \frac{\ell^2}{4}}$$

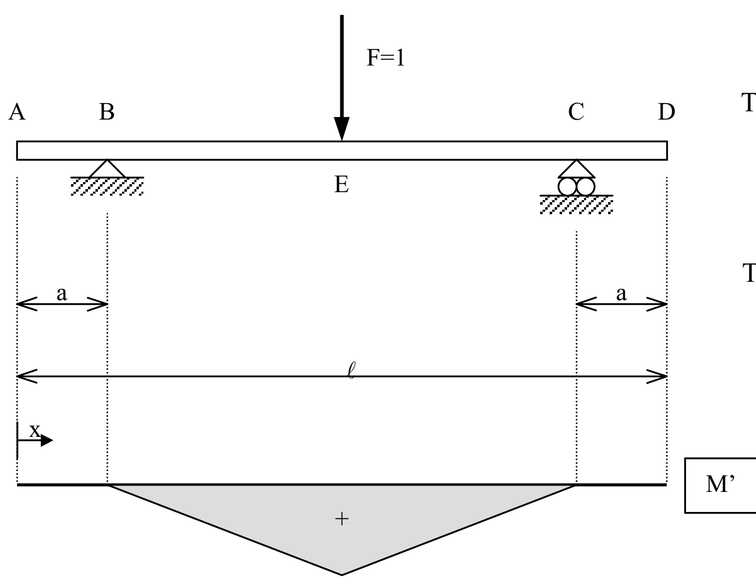
$$a = -\frac{\ell}{2} \pm \sqrt{\frac{2 \cdot \ell^2}{4}} = -\frac{\ell}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \quad \Rightarrow \quad a = \begin{cases} 0{,}207 \cdot \ell \\ (-1{,}207 \cdot \ell) \end{cases}$$

La segunda solución no interesa, porque cae fuera del intervalo analizado

Así pues, la distancia 'a' óptima es: $a_{óptima} = 20{,}7$ cm

Y se tiene, un momento máximo: $M_{máx} = 128{,}7$ cmKg

c) Cálculo de la flecha en el punto central, por el método de la fuerza unitaria.



Tramo BE:

$$M' = \frac{1}{2} \cdot (x - a)$$

Tramo EC:

$$M' = \frac{1}{2} \cdot (x - a) - 1 \cdot \left(x - \frac{\ell}{a}\right)$$

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial F} = \int \frac{M}{EI} M' \cdot dx = \left[\frac{1}{EI}\int_o^a - p\frac{x^2}{a} \cdot 0\, dx + \frac{1}{EI}\int_a^{\frac{\ell}{2}} \left(-p\frac{x^2}{2} + p\frac{\ell}{2}(x-a)\frac{1}{2}(x-a)\right) \cdot dx\right] \cdot 2$$

$$\delta = \frac{2}{2EI}\int_a^{\frac{\ell}{2}} \left(-p\frac{x^3}{2} + p\frac{\ell}{2}x^2 - p\frac{\ell \cdot a}{2}x + p\frac{a}{2}x^2 - p\frac{a \cdot \ell \cdot x}{2} + p\frac{a^2 \cdot \ell}{2}\right) \cdot dx$$