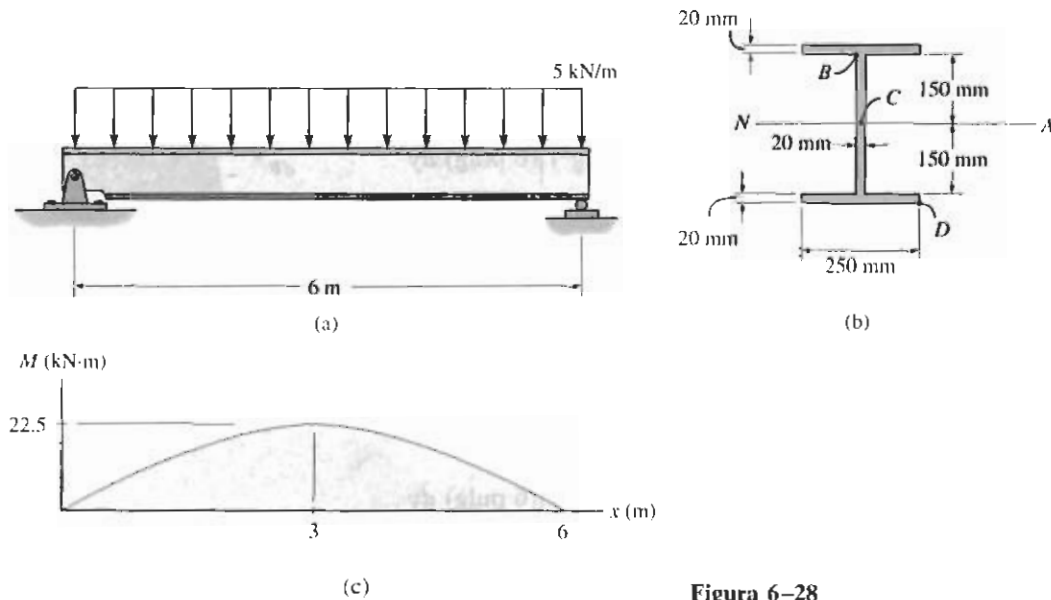


EJEMPLO 6-15

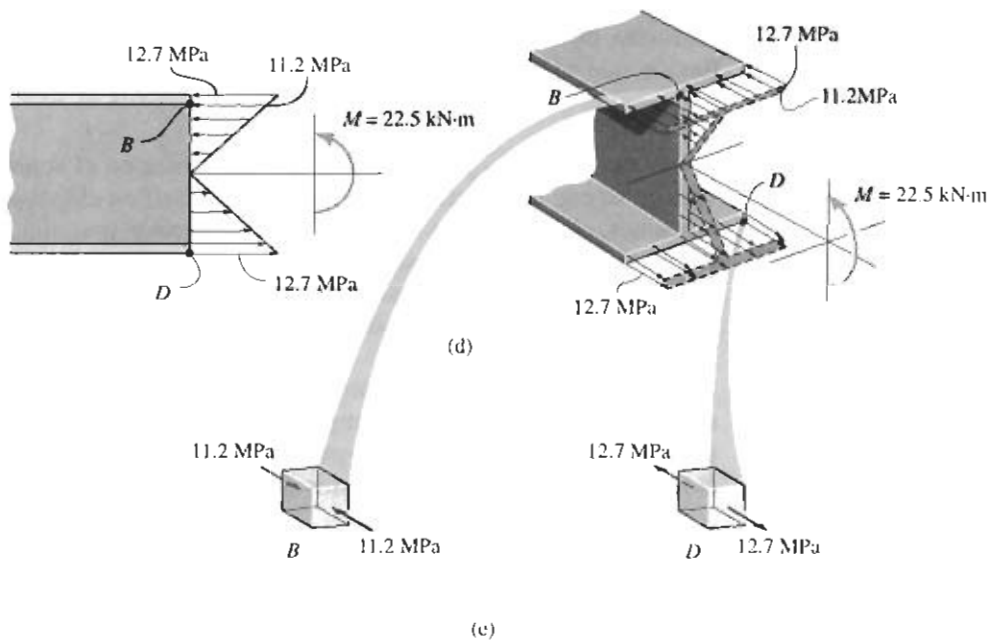
La viga simplemente apoyada en la figura 6-28a tiene la sección transversal mostrada en la figura 6-28b. Determine el esfuerzo máximo absoluto de flexión en la viga y dibuje la distribución del esfuerzo en la sección transversal en esta localidad.

**Figura 6-28****SOLUCIÓN**

Momento interno máximo. El momento interno máximo en la viga, $M = 22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$, ocurre en el centro del claro como se muestra en el diagrama de momento flexionante, figura 6-28c. Vea el ejemplo 6-3.

Propiedades de la sección. Por razones de simetría, el centroide C y el eje neutro pasan por la mitad de la altura de la viga, figura 6-28b. La sección transversal se subdivide en las tres partes mostradas y el momento de inercia de cada parte se calcula respecto al eje neutro usando el teorema de los ejes paralelos. (Vea la ecuación A-5 del apéndice A.) Trabajando en metros, tenemos:

$$\begin{aligned}
 I &= \Sigma(\bar{I} + Ad^2) \\
 &= 2 \left[\frac{1}{12}(0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.25 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.160 \text{ m})^2 \right] \\
 &\quad + \left[\frac{1}{12}(0.020 \text{ m})(0.300 \text{ m})^3 \right] \\
 &= 301.3(10^{-6}) \text{ m}^4
 \end{aligned}$$



Esfuerzo de flexión. Aplicando la fórmula de la flexión, con $c = 170 \text{ mm}$, el esfuerzo máximo absoluto de flexión es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.170 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 12.7 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

En la figura 6-28d se muestran vistas bi y tridimensionales de la distribución del esfuerzo. Note cómo el esfuerzo en cada punto sobre la sección transversal desarrolla una fuerza que contribuye con un momento dM respecto al eje neutro que tiene el mismo sentido que M . Específicamente, en el punto B, $y_B = 150 \text{ mm}$, por lo que:

$$\sigma_B = \frac{My_B}{I}; \quad \sigma_B = \frac{22.5 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.150 \text{ m})}{301.3(10^{-6}) \text{ m}^4} = 11.2 \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal que actúa sobre elementos de material localizados en los puntos B y D se muestra en la figura 6-28e.

EJEMPLO 6-16

La viga mostrada en la figura 6-29a tiene una sección transversal en forma de canal, figura 6-29b. Determine el esfuerzo máximo de flexión que se presenta en la sección $a-a$ de la viga.

SOLUCIÓN

Momento interno. En este caso, las reacciones en el soporte de la viga no tienen que determinarse. Podemos usar, con el método de las secciones, el segmento a la izquierda de la sección $a-a$, figura 6-29c. En particular, advierta que la fuerza axial interna resultante N pasa por el centroide de la sección transversal. Observe también que el momento interno resultante debe calcularse respecto al eje neutro de la viga en la sección $a-a$.

Para encontrar la posición del eje neutro, la sección transversal se subdivide en tres partes componentes, como se muestra en la figura 6-29b. Como el eje neutro pasa por el centroide, usando la ecuación A-2 del apéndice A, tenemos entonces:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2[0.100 \text{ m}](0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + [0.010 \text{ m}](0.02 \text{ m})(0.250 \text{ m})}{2(0.200 \text{ m})(0.015 \text{ m}) + 0.020 \text{ m}(0.250 \text{ m})}$$

$$= 0.05909 \text{ m} = 59.09 \text{ mm}$$

Esta posición se muestra en la figura 6-29c.

Aplicando la ecuación de equilibrio por momentos respecto al eje neutro, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum M_{NA} &= 0; & 2.4 \text{ kN}(2 \text{ m}) + 1.0 \text{ kN}(0.05909 \text{ m}) - M &= 0 \\ M &= 4.859 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Propiedades de la sección. El momento de inercia respecto al eje neutro se determina usando el teorema de los ejes paralelos, aplicado a cada una de las tres partes componentes de la sección transversal. Trabajando en metros, tenemos:

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{12}(0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})^3 + (0.250 \text{ m})(0.020 \text{ m})(0.05909 \text{ m} - 0.010 \text{ m})^2 \right] \\ &+ 2 \left[\frac{1}{12}(0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})^3 + (0.015 \text{ m})(0.200 \text{ m})(0.100 \text{ m} - 0.05909 \text{ m})^2 \right] \\ &= 42.26(10^{-6}) \text{ m}^4 \end{aligned}$$

Esfuerzo máximo de flexión. El esfuerzo máximo de flexión ocurre en los puntos más alejados del eje neutro. En este caso, el punto más alejado está en el fondo de la viga; $c = 0.200 \text{ m} - \bar{y} = 0.1409 \text{ m}$. Entonces,

$$\sigma_{\max} = \frac{Mc}{I} = \frac{4.859 \text{ kN} \cdot \text{m}(0.1409 \text{ m})}{42.26(10^{-6}) \text{ m}^4} = 16.2 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Muestre que en la parte superior de la viga el esfuerzo de flexión es $\sigma = 6.79 \text{ MPa}$. Note que además de este efecto de flexión, la fuerza normal de $N = 1 \text{ kN}$ y la fuerza cortante $V = 2.4 \text{ kN}$ contribuirán también con esfuerzos adicionales sobre la sección transversal. La superposición de todos esos efectos se verá en un capítulo posterior.

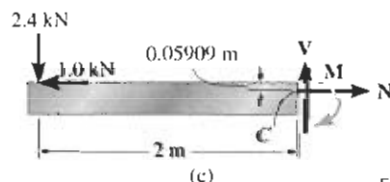
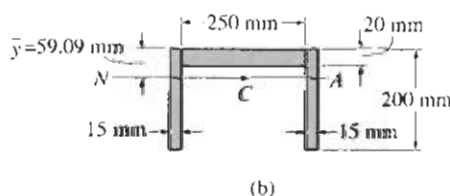
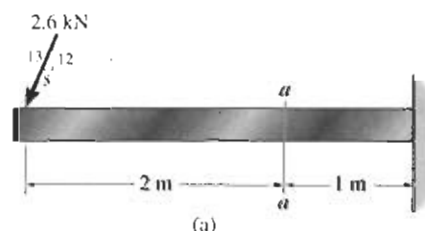


Figura 6-29

EJEMPLO 6-17

El miembro con sección transversal rectangular, figura 6-30a, está diseñado para resistir un momento de $40 \text{ N} \cdot \text{m}$. Para aumentar su resistencia y rigidez, se propone añadir dos pequeñas costillas en su fondo, figura 6-30b. Determine el esfuerzo normal máximo en el miembro para ambos casos.

SOLUCIÓN

Sin costillas. Es claro que el eje neutro se localiza en el centro de la sección transversal, figura 6-30a, por lo que $\bar{y} = c = 15 \text{ mm} = 0.015 \text{ m}$. Así,

$$I = \frac{1}{12} b h^3 = \frac{1}{12} (0.06 \text{ m})(0.03 \text{ m})^3 = 0.135(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Por tanto, el esfuerzo normal máximo es:

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{(40 \text{ N} \cdot \text{m})(0.015 \text{ m})}{0.135(10^{-6}) \text{ m}^4} = 4.44 \text{ MPa} \quad \text{Resp.}$$

Con costillas. En la figura 6-30b, segmentando la sección en el rectángulo grande principal y en los dos rectángulos inferiores (costillas), la posición del centroide y del eje neutro se determinan como sigue:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A}$$

$$= \frac{[0.015 \text{ m}](0.030 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2[0.0325 \text{ m}](0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}{(0.03 \text{ m})(0.060 \text{ m}) + 2(0.005 \text{ m})(0.010 \text{ m})}$$

$$= 0.01592 \text{ m}$$

Este valor no representa a c . Más bien,

$$c = 0.035 \text{ m} - 0.01592 \text{ m} = 0.01908 \text{ m}$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia

$$I = \left[\frac{1}{12} (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})^3 + (0.060 \text{ m})(0.030 \text{ m})(0.01592 \text{ m} - 0.015 \text{ m})^2 \right]$$

$$+ 2 \left[\frac{1}{12} (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})^3 + (0.010 \text{ m})(0.005 \text{ m})(0.0325 \text{ m} - 0.01592 \text{ m})^2 \right]$$

$$= 0.1642(10^{-6}) \text{ m}^4$$

respecto al eje neutro es:

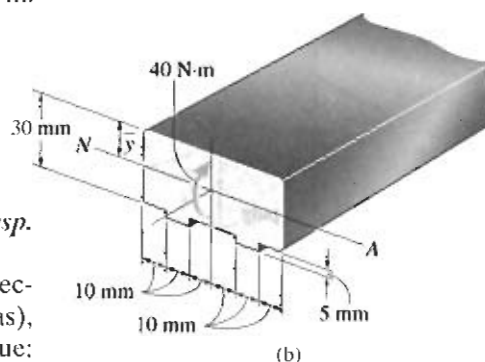
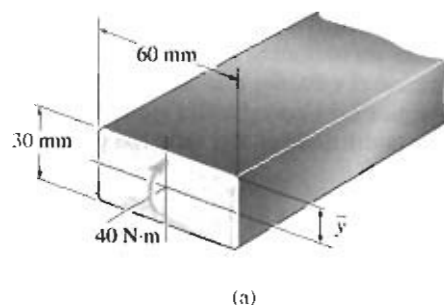
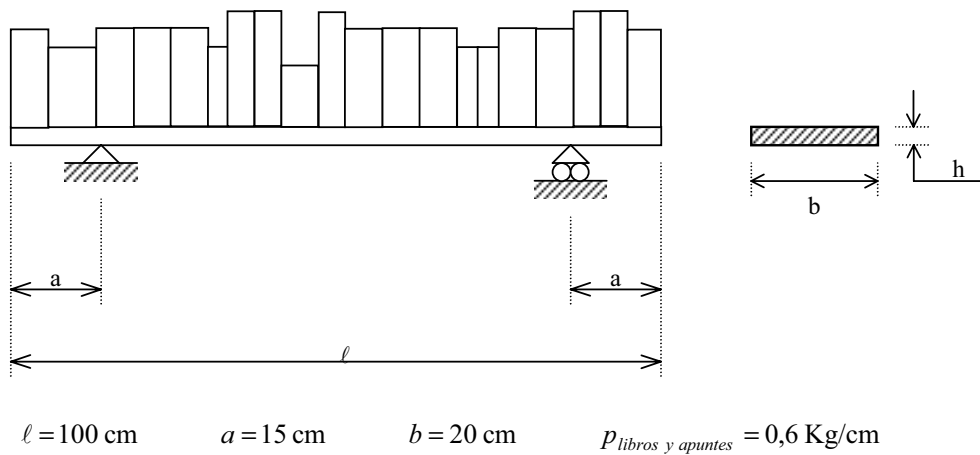


Figura 6-30

Problema 5.3

Un estudiante ha decidido instalar un estante para colocar sus libros y apuntes. Los ha colocado uno junto al otro y ha medido la longitud total de estante que necesita y la anchura que debe tener. Al ir a comprar el estante ve que para estas dimensiones puede escoger varios espesores distintos. No sabe cuál escoger. Entonces recurre a un amigo suyo que está haciendo 3^{er} curso de Ingeniería Industrial y le expone el problema:

He decidido instalar un estante para libros, según el croquis de la figura:

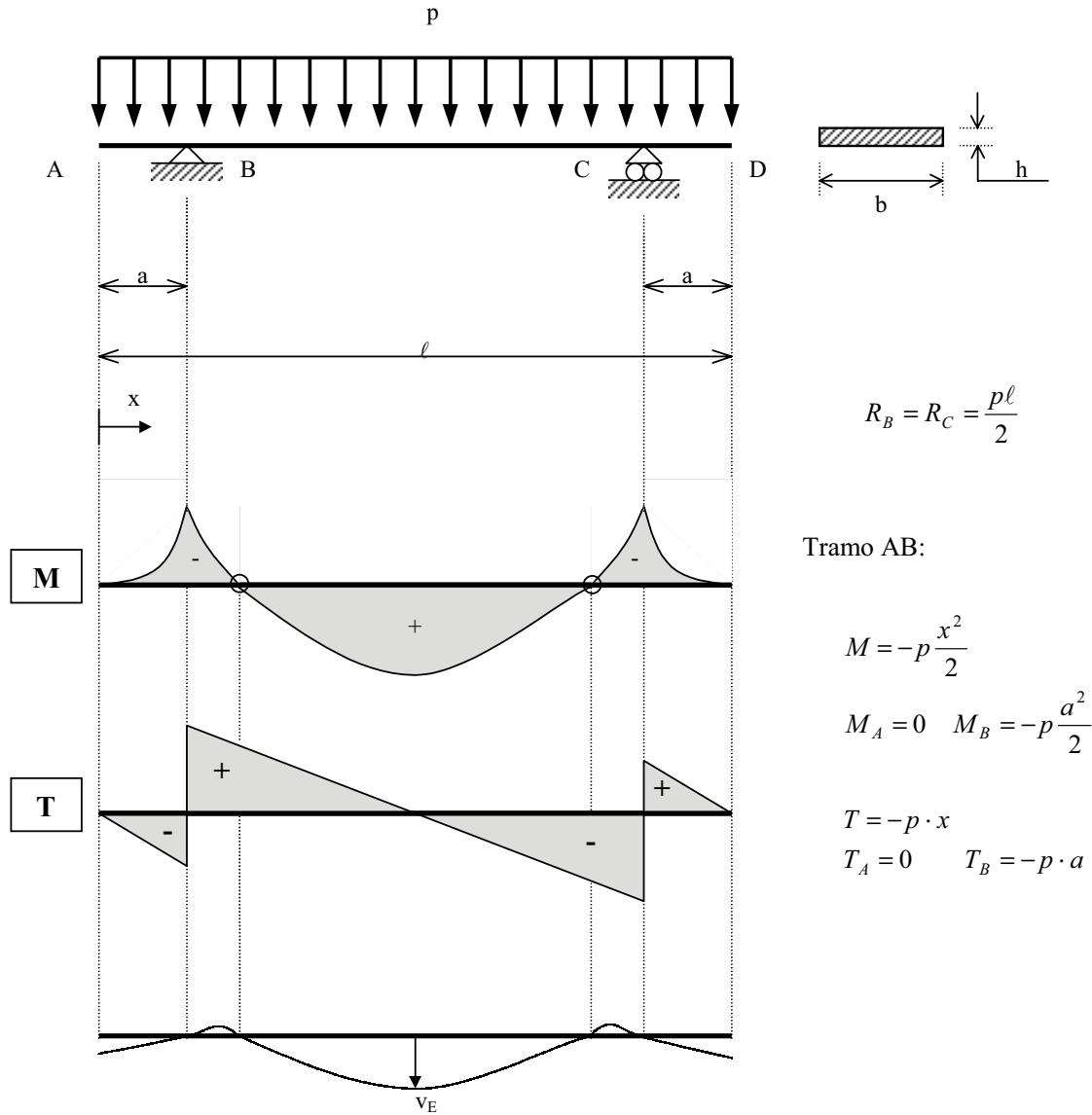


En la tienda me han informado de que la madera de los estantes tiene las siguientes características mecánicas:

$$\sigma_{adm} = 4 \text{ N/mm}^2 \quad E = 10\,000 \text{ N/mm}^2$$

La cuestión es:

- ¿De qué espesor h mínimo debo colocar el estante?
- Los dos apoyos los he colocado, simétricamente, a una distancia $a = 15 \text{ cm}$ del extremo por razones puramente estéticas. Pero, atendiendo a razones de comportamiento resistente, ¿cuál sería la distancia óptima de los apoyos a los extremos, que podría minimizar el espesor h del estante?
- Finalmente, me preocupa saber cuál será la flecha que tendrá el estante, una vez cargado, en su punto central (con la distancia a inicial).

Resolución:a) Determinación de h mínima.

Tramo BC:

$$M = -p \frac{x^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (x - a) \Rightarrow M_B = -p \frac{a^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (a - a) = -p \frac{a^2}{2}$$

$$M_C = M_B = -p \frac{a^2}{2}$$

$$\left(x_E = \frac{\ell}{2} \right) M_E = -p \frac{\ell^2}{8} + p \frac{\ell^2}{4} - p \frac{\ell \cdot a}{2} = p \frac{\ell^2}{8} - p \frac{\ell \cdot a}{2}$$

$$T = -p \cdot x + p \frac{\ell}{2}$$

$$T_B = -p \cdot a + p \frac{\ell}{2}$$

$$T_C = -p \cdot (\ell - a) + p \frac{\ell}{2} = p \cdot a - p \frac{\ell}{2}$$

Tramo CD:

$$M = -p \frac{x^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (x - a) + p \frac{\ell}{2} (x - (\ell - a)) = -p \frac{x^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (x - a + x - \ell + a)$$

$$M = -p \frac{x^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (2x - \ell)$$

$$M_C = -p \frac{(\ell - a)^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (2(\ell - a) - \ell) = -p \frac{a^2}{2}$$

$$M_D = -p \frac{\ell^2}{2} + p \frac{\ell}{2} (2\ell - \ell) = 0$$

$$T = -p \cdot x + p \cdot \ell$$

$$T_C = -p(\ell - a) + p \cdot \ell = p \cdot a$$

$$T_D = -p \cdot \ell + p \cdot \ell = 0$$

Con $\ell = 100$ cm, $a = 15$ cm y $p = 0,6$ Kg/cm, tenemos los siguientes resultados:

$$M_B = M_C = -112,5 \cdot p = -67,5 \text{ cmKg}$$

$$M_E = 500 \cdot p = 300 \text{ cmKg}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} = \frac{M_E}{W_z} \leq \sigma_{adm} = 40,77 \text{ Kg/cm}^2 \Rightarrow W_{z,\min} = \frac{M_E}{40,77} - \frac{b \cdot h^2}{6}$$

$$\Rightarrow_{(b=20)} h_{\min} = \sqrt{\frac{M_E \cdot 6}{40,77 \cdot 20}} \Rightarrow h_{\min} = 1,49 \text{ cm}$$

b) Determinación de la distancia a óptima.

Óptimo resistente:

$$|M_{\max -}| = |M_{\max +}|$$

$\Downarrow$

$$|M_B| = |M_E|$$

$\Downarrow$

$$p \frac{a^2}{2} = p \frac{\ell^2}{8} - p \frac{a \cdot \ell}{2}$$

$$\delta = \frac{P}{EI} \left[-\frac{x^4}{8} + \frac{\ell \cdot x^3}{6} - \frac{\ell \cdot a \cdot x^2}{4} + \frac{a \cdot x^3}{6} - \frac{a \cdot \ell \cdot x^2}{4} + \frac{a^2 \cdot \ell \cdot x}{2} \right]_a^{\ell}$$

$$\delta = \frac{0,6}{EI} (-781,25 + 2083 - 937,5 + 312,5 - 937,5 + 562,5 + 6,328$$

$$- 56,25 + 84,375 - 8,437 + 84,375 - 168,75) \cdot 10^3 = \frac{0,6 \cdot 24724}{100\,000 \cdot 5,513} = 0,265 \quad \text{cm}$$

$$\left(I = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 1,49^3}{12} = 5,513 \quad \text{cm}^4 \right)$$