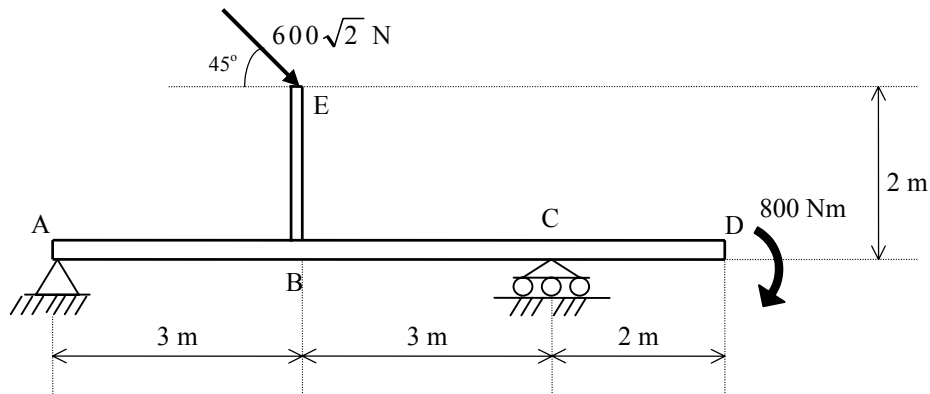


Problema 1.1

Determinar los diagramas de esfuerzos en la estructura de la figura.

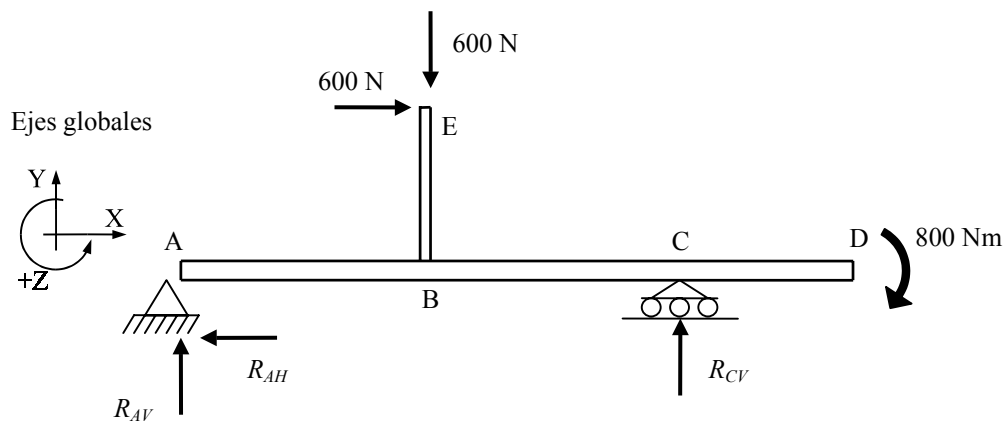


$$F_H = 600\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 600 \text{ N}$$

$$F_V = 600\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 600 \text{ N}$$

Resolución:

- Descomposición de la fuerza exterior aplicada en el extremo de la barra BE.
- Cálculo de las reacciones.



Tomamos momentos respecto al punto C:

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow R_{AV} \cdot 6 - 600 \cdot 3 + 600 \cdot 2 + 800 = 0 \Rightarrow R_{AV} = -\frac{100}{3} \text{ N} = -33,3 \text{ N}$$

Suma de fuerzas verticales y horizontales:

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{AV} - 600 + R_{CV} = 0 \Rightarrow \frac{100}{3} + 600 = R_{CV} = \frac{1900}{3} \text{ N}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{AH} = 600 \text{ N}$$

c) Cálculo de momentos en los tramos AB y BC.

Tramo AB: $M(x) = R_{AV} \cdot x = -\frac{100}{3} \cdot x$ $M_A = 0$ $M_B = -100 \text{ Nm}$

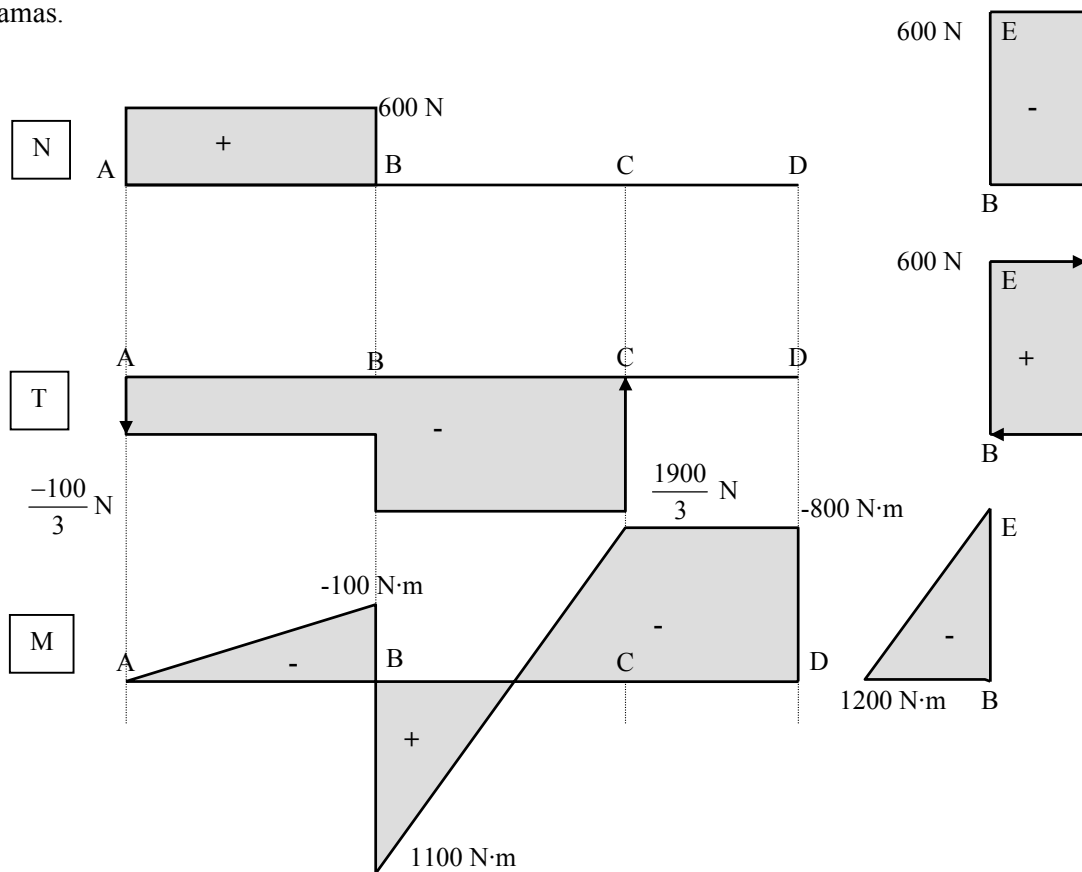
Tramo BC:

$$M(x) = R_{AV} \cdot x - 600(x - 3) + 600 \cdot 2$$

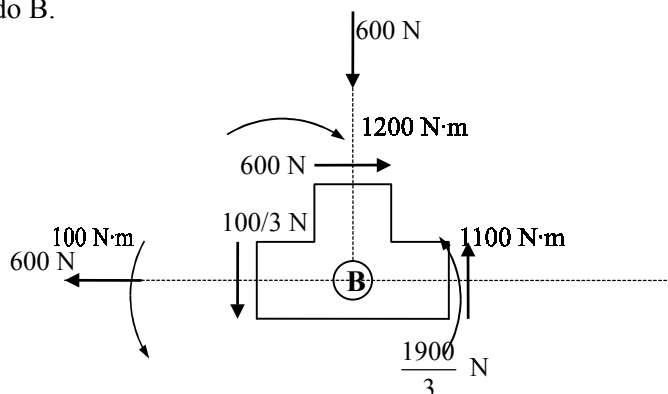
$$M_B = -\frac{100}{3} \cdot 3 - 0 + 1200 = 1100 \text{ Nm}$$

$$M_C = -\frac{100}{3} \cdot 6 - 600 \cdot 3 + 600 \cdot 2 = -800 \text{ Nm}$$

Diagramas.

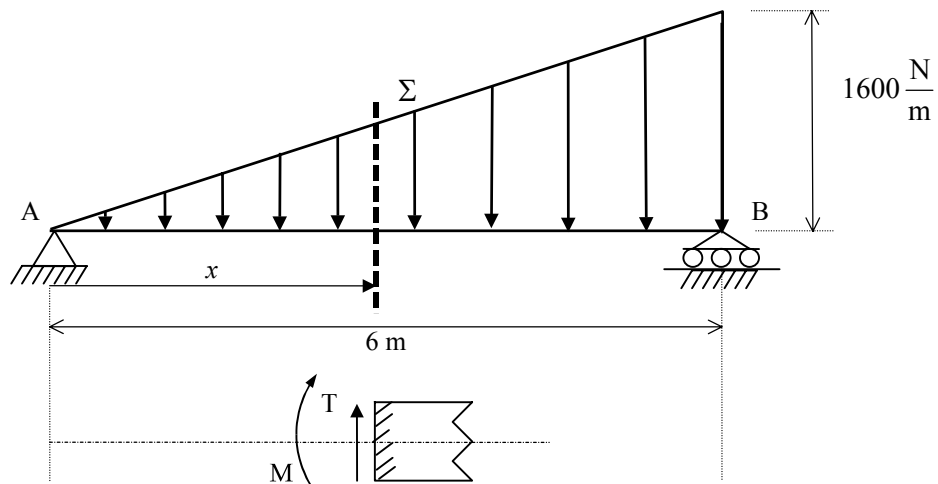


Equilibrio del nudo B.



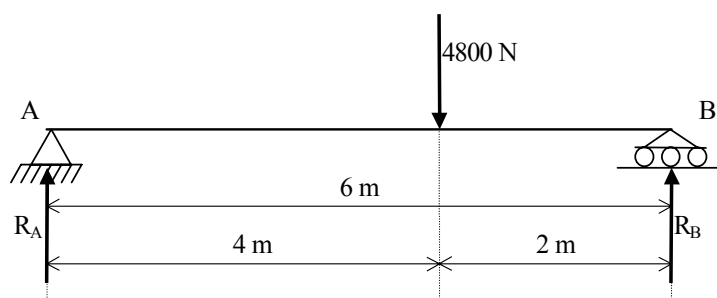
Problema 1.2

Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura, apoyada en los extremos y sometida a una carga repartida triangular.

**Resolución:**

a) Cálculo de la reacciones.

Resultante de la carga $Q = \frac{1600 \cdot 6}{2} = 4800 \text{ N}$.



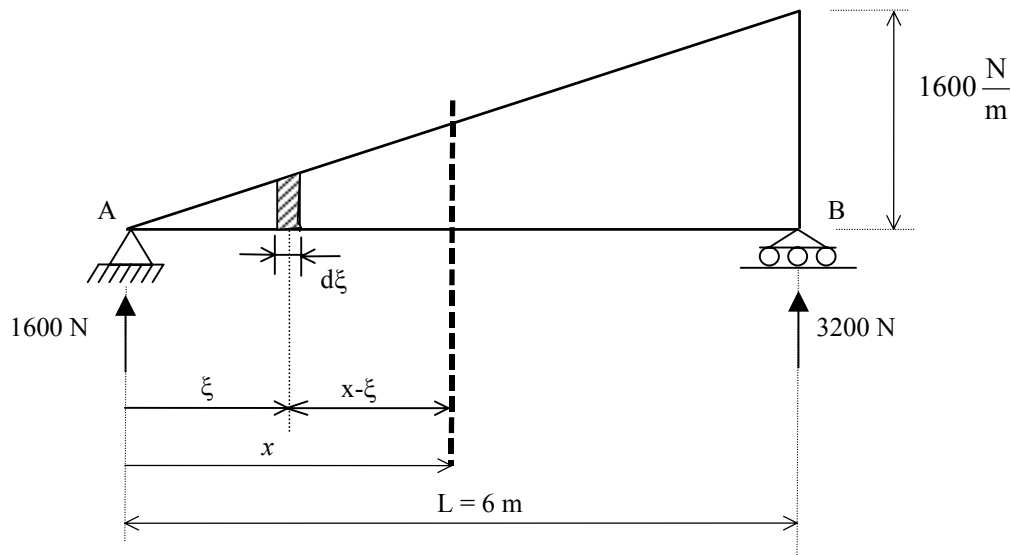
$$R_A + R_B = 4800$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 6 = 4800 \cdot 4$$

$$R_B = \frac{4800 \cdot 4}{6} = 3200 \text{ N}$$

$$R_A = 1600 \text{ N}$$

b) Cálculo de los esfuerzos de sección.



Sección situada a una distancia x del apoyo A:

T:

$$T = 1600 - \int_0^x q \, d\xi = 1600 - \int_0^x \frac{1600}{6} \xi \, d\xi$$

$$T = 1600 - \left[\frac{1600}{6} \cdot \frac{\xi^2}{2} \right]_0^x = 1600 - \frac{1600}{12} x^2$$

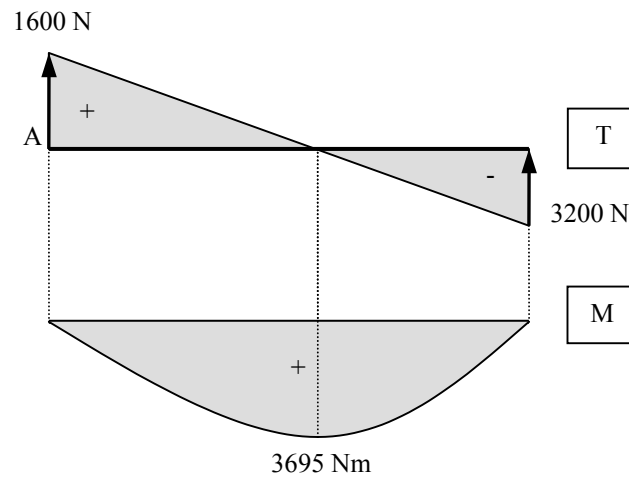
M:

$$M = 1600 x - \int_0^x q \cdot (x - \xi) \, d\xi = 1600 x - \int_0^x \frac{1600}{6} \xi \cdot (x - \xi) \, d\xi$$

$$M = 1600 x - \left[\frac{1600}{6} \cdot \left(\frac{\xi^2}{2} x - \frac{\xi^3}{3} \right) \right]_0^x$$

$$M = 1600 x - \left(\frac{1600}{6} \cdot \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \right) = 1600 x - \frac{1600}{6} \cdot \frac{x^3}{6}$$

c) Diagramas.



d) Punto de $M_{\text{máx}}$

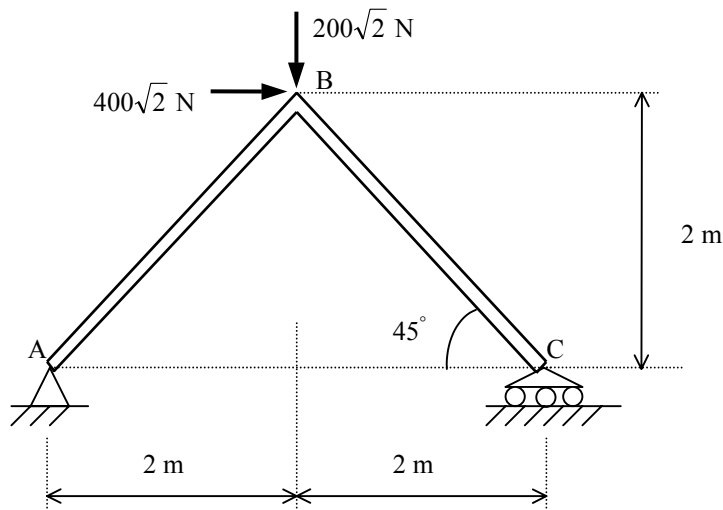
$$\frac{\partial M}{\partial x} = T \Rightarrow T = 0$$

$$T = 0 = 1600 - \frac{1600}{12} x^2 \rightarrow x = \sqrt{12} = 3,46 \text{ m}$$

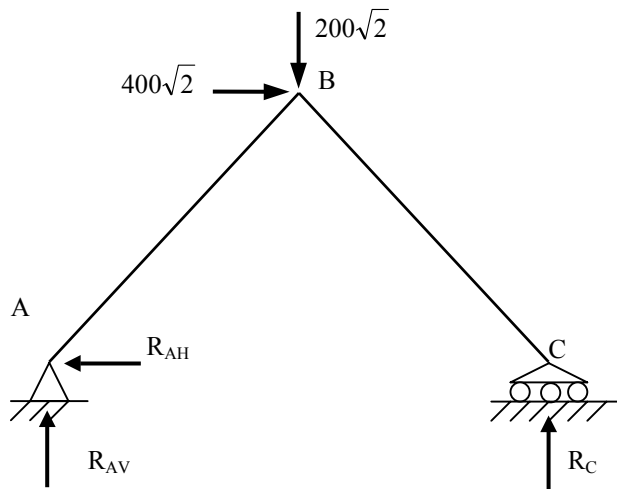
$$M_{\text{máx}} = 1600 \cdot 3,46 - \frac{1600}{12} \cdot 3,46^2 = 3695 \text{ Nm}$$

Problema 1.3

Determinar los diagramas de esfuerzos del pórtico inclinado de la figura.

**Resolución:**

Para el cálculo de las reacciones, planteamos las ecuaciones de la estática.



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_{AV} + R_C - 200\sqrt{2} = 0$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{AH} = 400\sqrt{2} \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_C \cdot 4 - 400\sqrt{2} \cdot 2 - 200\sqrt{2} \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_C = 300\sqrt{2} \text{ N}$$

por tanto, $R_{AV} = -100\sqrt{2} \text{ N}$ y descomponiendo cada reacción en las direcciones de las barras,

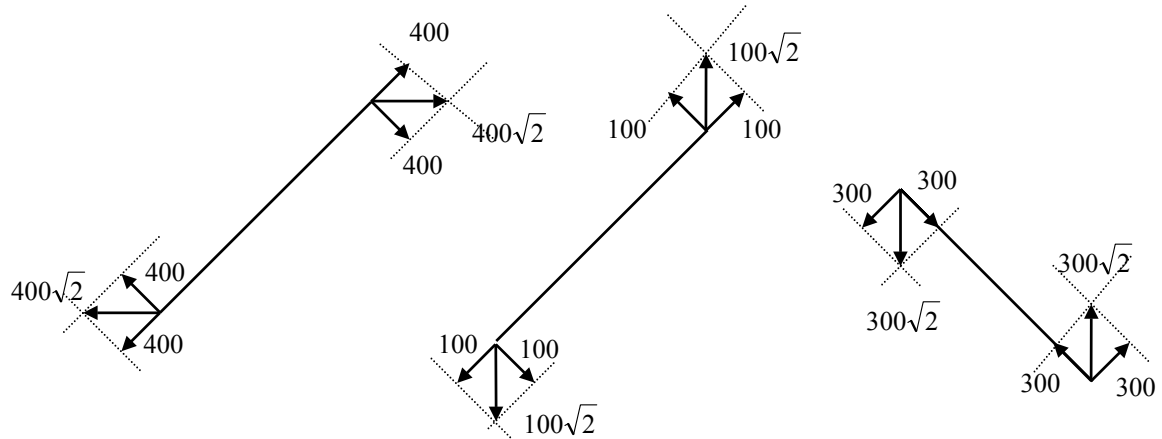


Diagrama N

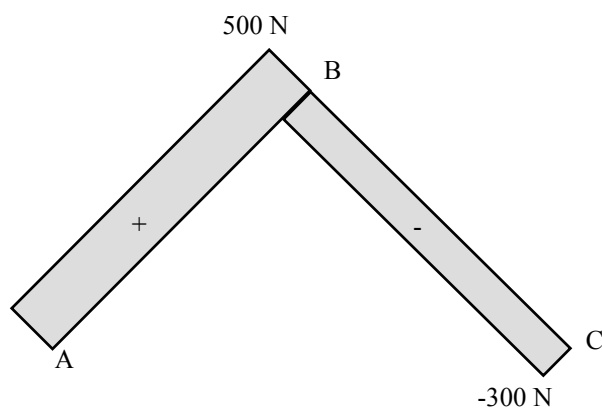


Diagrama T

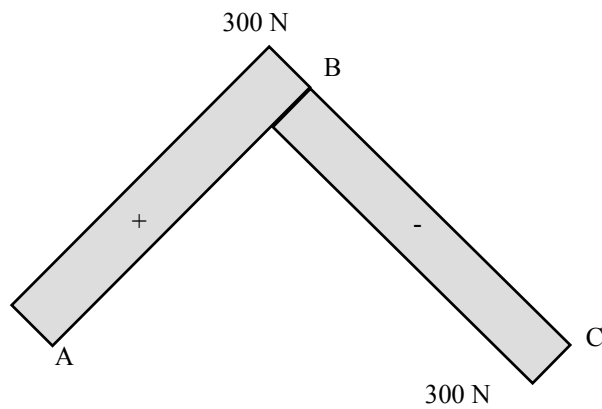
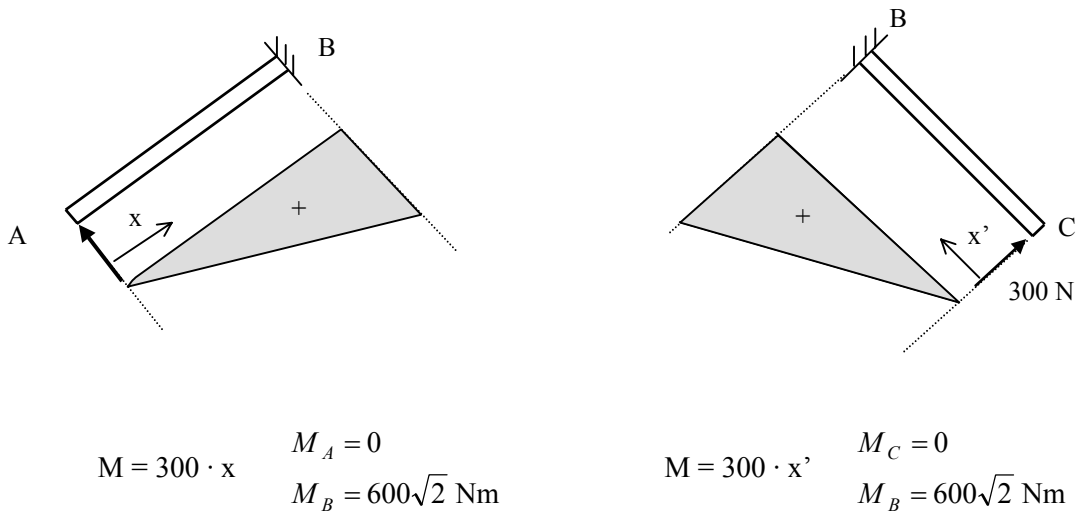
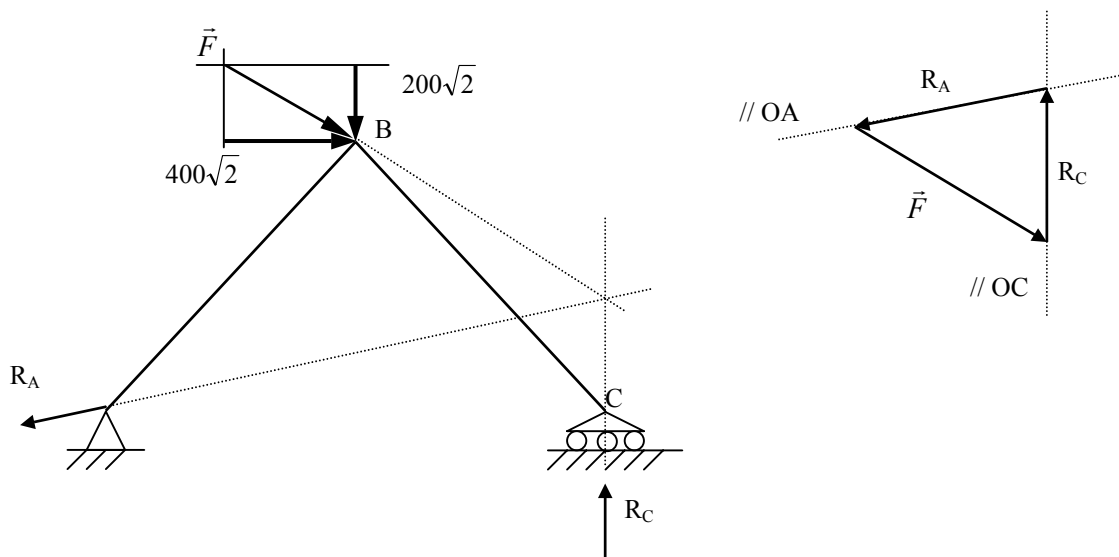


Diagrama M



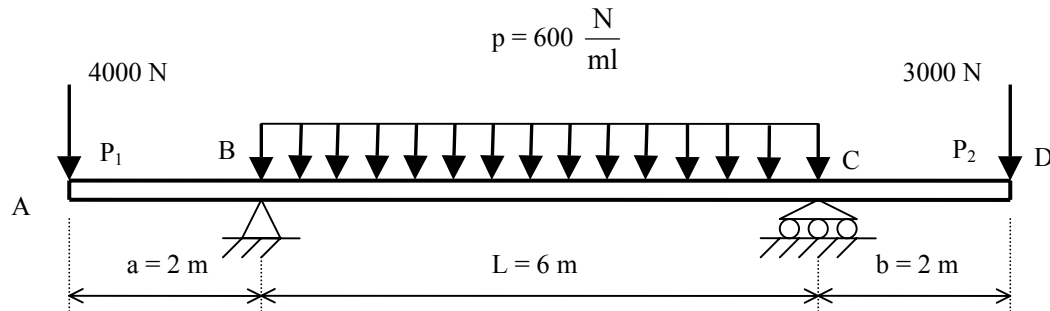
Método alternativo para hallar las reacciones: resolución gráfica.

Para que las tres fuerzas estén en equilibrio, sus líneas de acción deben cruzarse en punto O (ya que $\sum M_0 = 0$). A partir de la línea de acción vertical de R_C , se obtiene O.



Problema 1.4

Determinar los diagramas de esfuerzos en la viga de la figura.

**Resolución:**

Cálculo de las reacciones:

$$\sum F_V: R_B + R_C - 4000 - 600 \cdot 6 - 3000 = 0$$

$$\sum M_B: 4000 \cdot 2 - 600 \cdot 6 \cdot 3 + R_C \cdot 6 - 3000 \cdot 8 \Rightarrow R_C = 4467 \text{ N}$$

$$R_B = 6133 \text{ N}$$

Diagrama de momentos flectores:

Tramo AB:

$$M = -4000 \cdot x$$

$$M_A = 0 \quad M_B = -8000 \text{ Nm}$$

Tramo BC:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x - 2) - 600 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2}$$

$$M_B = -8000 \text{ Nm} \quad M_C = -6000 \text{ Nm}$$

Tramo CD:

$$M = -4000 \cdot x + 6133 \cdot (x - 2) - 600 \cdot 6 \cdot (x - 5) + 4467 \cdot (x - 8)$$

$$M_C = -6000 \text{ Nm} \quad M_D = 0$$

Diagrama de esfuerzos cortantes.

Tramo AB:

$$T = -4000 \text{ N}$$

$$T_A = -4000 \text{ N} \quad T_B = -4000 \text{ N}$$

Tramo BC:

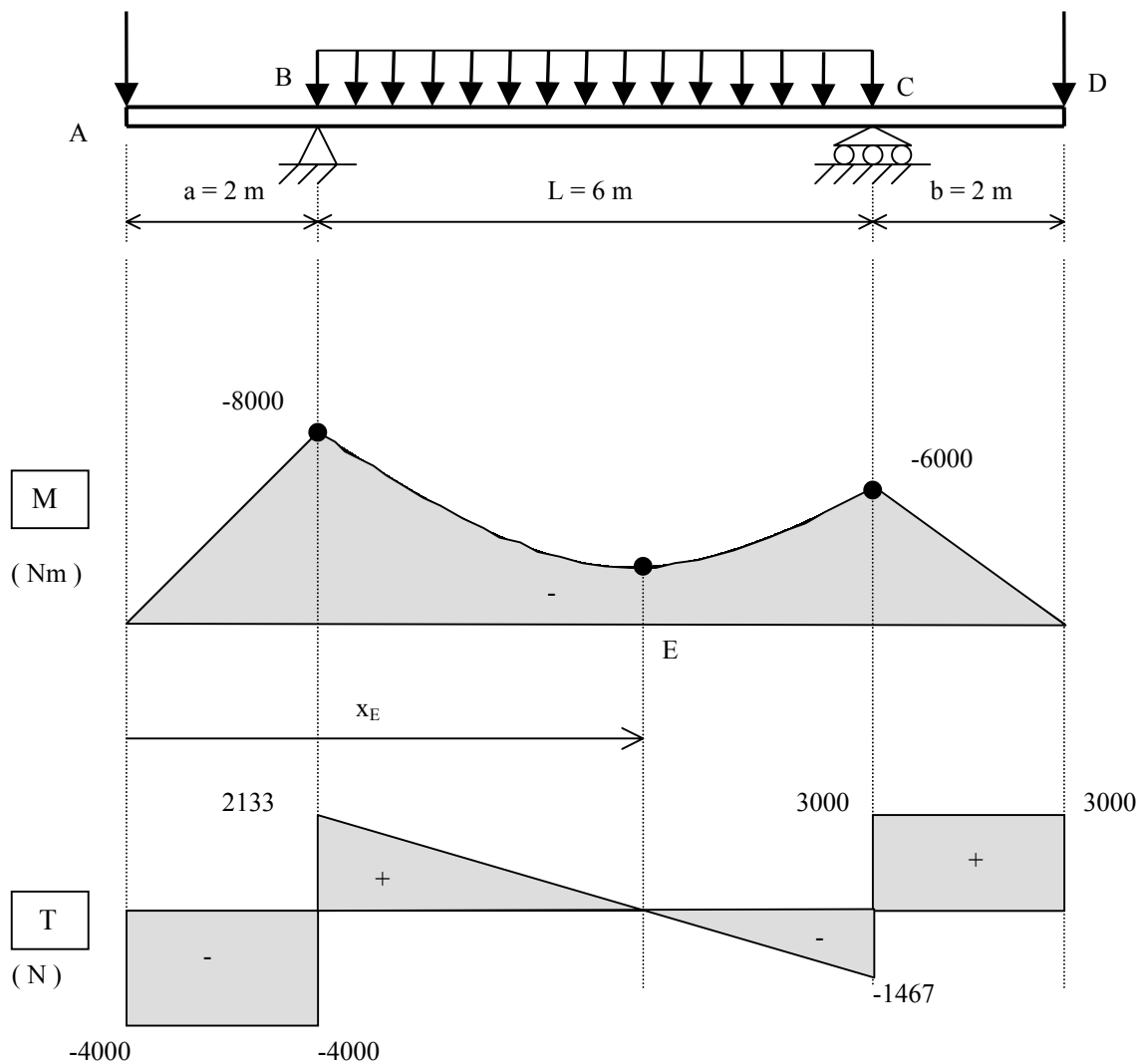
$$T = -4000x + 6133 - 600 \cdot (x - 2)$$

$$T_B = 2133 \text{ N} \quad T_C = -1467 \text{ N}$$

Tramo CD:

$$T = -4000 + 6133 - 3600 + 4467$$

$$T_C = 3000 \text{ N} \quad T_D = 3000 \text{ N}$$



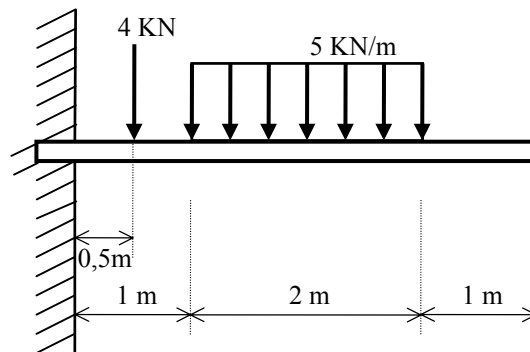
El diagrama de momentos flectores pasa por un mínimo relativo en el punto E, donde la tangente es horizontal, o sea:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = T = 0 \quad : \quad -4000 + 6133 - 600 \cdot (x_E - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 5,35 \text{ m}$$

$$M_E = -4208 \text{ Nm}$$

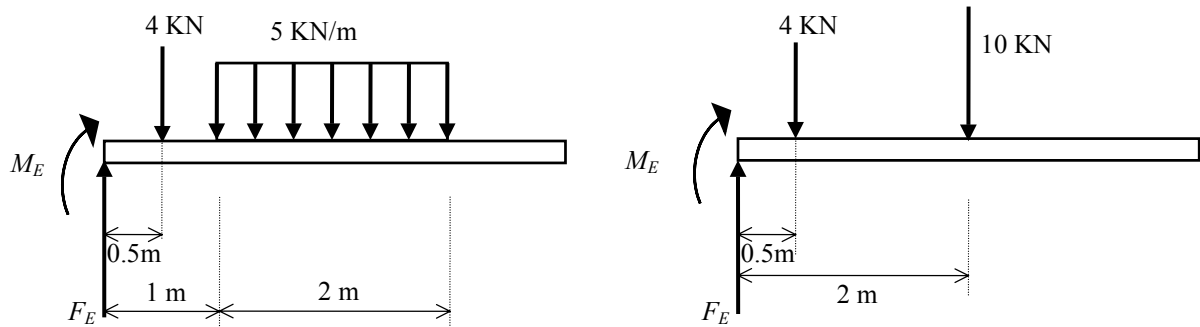
Problema 1.5

En la viga en voladizo de la figura, calcular las reacciones en el empotramiento y dibujar los diagramas de esfuerzos cortantes y de momentos flectores en toda la viga.

**Resolución:**

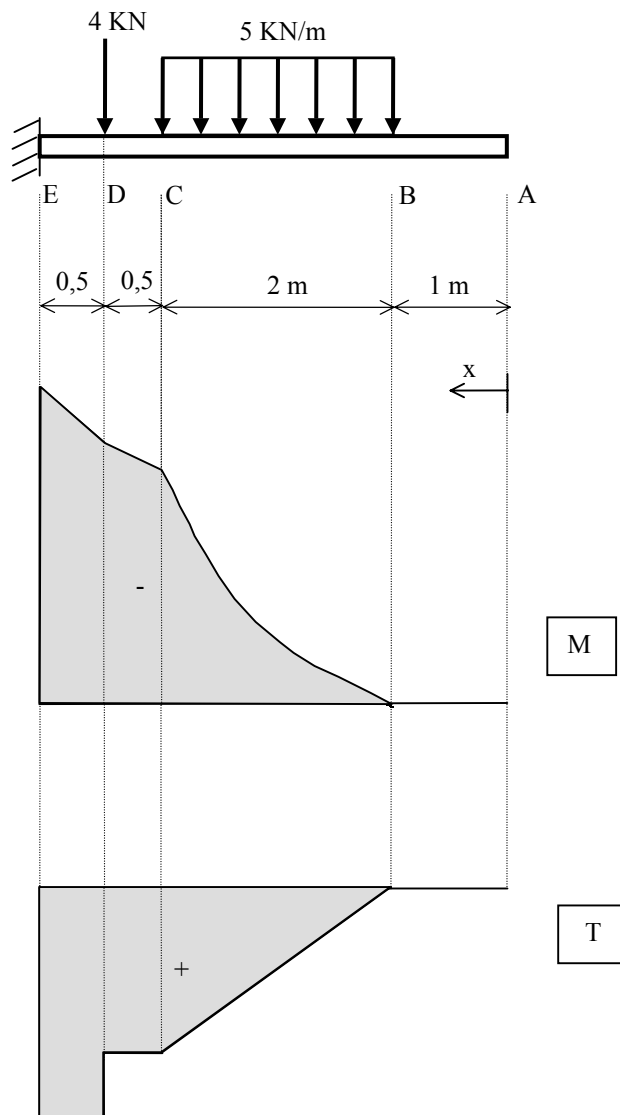
a) Reacciones en el empotramiento.

Comenzaremos por buscar el sistema de fuerzas que ejerce el empotramiento, dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos al equilibrio. Sumando fuerzas y tomando momentos obtenemos:



$$\left. \begin{aligned} F_E &= 14 \text{ kN} \\ M_E &= -4 \cdot 0,5 - 10 \cdot 2 = -22 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \right\} \text{ Reacciones que ejerce el empotramiento sobre la viga.}$$

b) Diagramas



Tramo AB: $M = 0$ $T = 0$

Tramo BC:

$$M = -5 \cdot \frac{(x-1)^2}{2} \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad M_B = 0$$

$$M_C = 0$$

$$T = -5 \cdot (x-1)^2 \text{ (KN)}$$

$$T_B = 0$$

$$T_C = -10 \text{ KN}$$

Tramo CD:

$$M = -10 \cdot (x - 2) \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad \begin{aligned} M_C &= -10 \text{ KN} \cdot \text{m} \\ M_D &= -15 \text{ KN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$T = -10 \text{ (KN)} \quad \begin{aligned} T_C &= -10 \text{ KN} \\ T_D &= -10 \text{ KN} \end{aligned}$$

Tramo DE:

$$M = -10 \cdot (x - 2) - 4 \cdot (x - 3,5) \text{ (KN} \cdot \text{m)} \quad \begin{aligned} M_D &= -15 \text{ KN} \cdot \text{m} \\ M_E &= -22 \text{ KN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

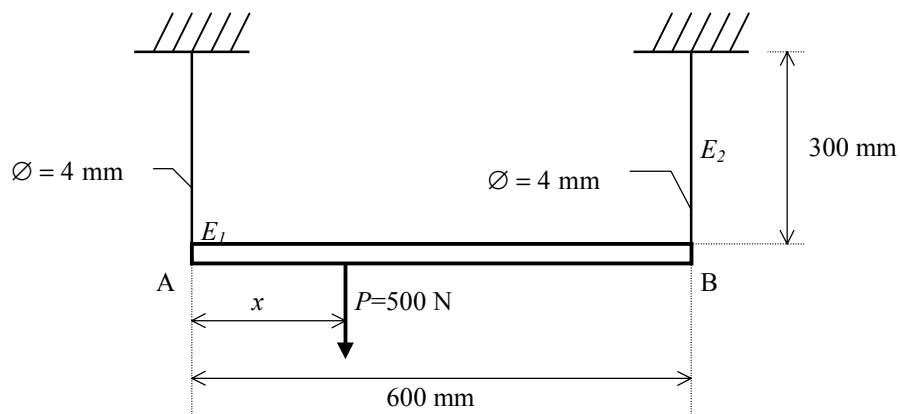
$$T = -10 - 4 = -14 \text{ (KN)} \quad \begin{aligned} T_D &= -14 \text{ KN} \\ T_E &= -14 \text{ KN} \end{aligned}$$

Estos diagramas se han obtenido tomando el origen de las x en el extremo A, de la derecha, porque en este caso, es más cómodo. Si se determinan los diagramas tomando el origen de las x en el extremo de la izquierda E, tal como se hace habitualmente, el diagrama de momentos flectores, M , sale idéntico; pero el diagrama de esfuerzos cortantes sale opuesto (igual, pero de signo cambiado).

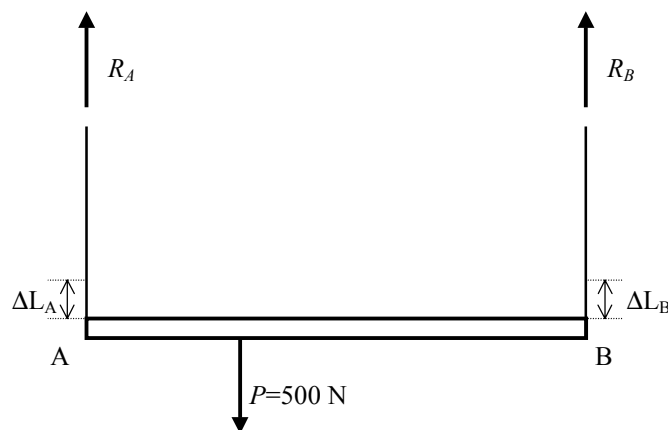
Problema 2.1

Tenemos una barra rígida que está suspendida por dos cables de igual diámetro $\varnothing = 4 \text{ mm}$, y cuyos módulos de elasticidad son: $E_1 = 2.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ y $E_2 = 0.7 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. La longitud de la barra es de 600 mm y la de los cables 300 mm. Se considera despreciable el peso propio de la barra. Dicha barra está sometida a una carga puntual $P = 500 \text{ N}$.

Calcular la posición x de la fuerza para que los puntos A y B tengan el mismo descenso.

**Resolución:**

Dibujamos el diagrama de sólido libre y obligamos el equilibrio. Además imponemos la igualdad de deformaciones.



$$\sum F_V = 0 \Rightarrow R_A + R_B = P$$

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow R_A \cdot L - P(L - x) = 0$$

$$\Delta L_A = \Delta L_B$$

Ley de Hooke :

$$\frac{R_A \cdot L_A}{S \cdot E_1} = \frac{R_B \cdot L_B}{S \cdot E_2} \Rightarrow R_A = \frac{R_B \cdot E_1}{E_2} = \frac{R_B \cdot 210000}{70000} \Rightarrow R_A = 3R_B$$

$$3R_B + R_B = 500 \Rightarrow R_B = \frac{500}{4} = 125 \text{ N} \Rightarrow R_A = 375 \text{ N}$$

De la ecuación de los momentos obtenemos x :

$$R_A \cdot L - P(L - x) = 0$$

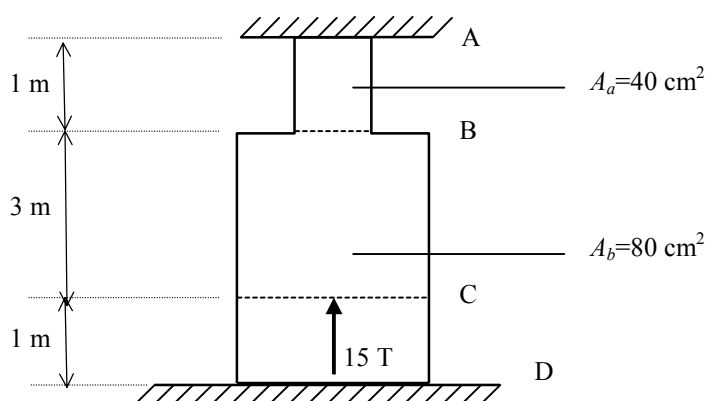
$$375 \cdot 600 - 500(600 - x) = 0 \Rightarrow x = 150 \text{ mm}$$

Problema 2.2

En la barra esquematizada en la figura adjunta los extremos A y D están empotrados. Determinar las tensiones en ambas secciones, cuyas superficies son: $A_a=40 \text{ cm}^2$ y $A_b=80 \text{ cm}^2$.

Hallar también el diagrama de esfuerzos axiales.

Datos: $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.

**Resolución:**

$$\sum F_V = 0$$

$$R_A + R_D = 15 \text{ T} = 150000 \text{ N}$$

Ecuación de deformación

El tramo AC está comprimido, por tanto R_A es un esfuerzo de compresión, y el tramo CD está traccionado, por lo que R_D es un esfuerzo de tracción.

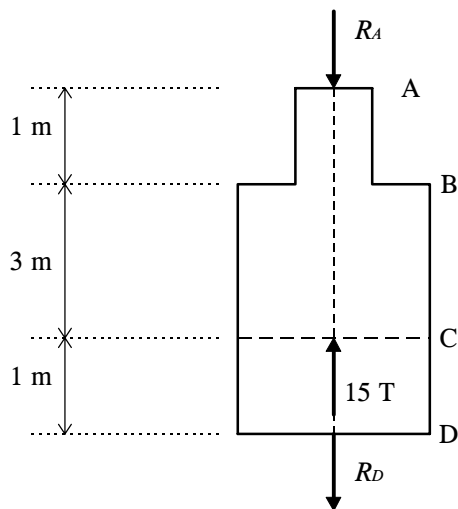
Al estar los dos extremos, A y D, empotrados la variación total de longitud es 0; y el acortamiento del tramo superior es igual al alargamiento del tramo inferior:

$$\Delta L_{AB} + \Delta L_{BC} = \Delta L_{CD}$$

Aplicando la ley de Hooke:

$$\Delta L = \frac{F \cdot L}{A \cdot E}$$

$$\frac{R_A \cdot L_{AB}}{E \cdot A_a} + \frac{R_A \cdot L_{BC}}{E \cdot A_b} = \frac{R_D \cdot L_{CD}}{E \cdot A_b}$$



$$\frac{R_A \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 10^2} + \frac{R_A \cdot 3000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2} = \frac{R_D \cdot 1000}{2 \cdot 10^5 \cdot 80 \cdot 10^2}$$

$$R_A \cdot 2000 + R_A \cdot 3000 = R_D \cdot 1000$$

Resolviendo las ecuaciones, tenemos

$$R_A = 25000 \text{ N} = 2.5 \text{ T}$$

$$R_D = 125000 \text{ N} = 12.5 \text{ T}$$

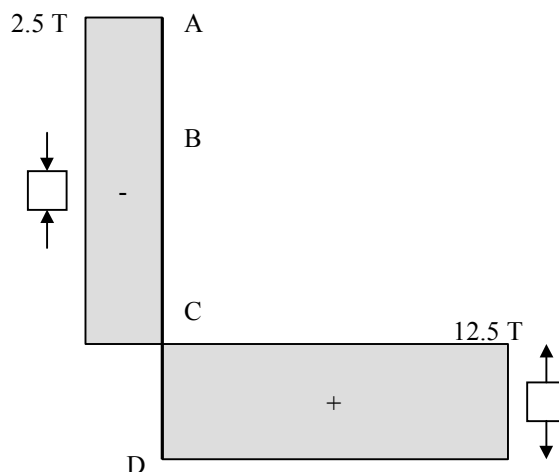
Cálculo de las tensiones.

$$\text{Tramo AB: } \sigma_{AB} = \frac{25000 \text{ N}}{40 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 6.25 \text{ MPa (COMP.)}$$

$$\text{Tramo BC: } \sigma_{BC} = \frac{25000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 3.125 \text{ MPa (COMP.)}$$

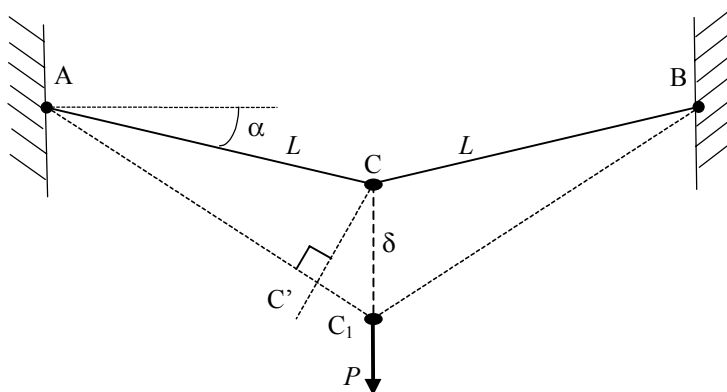
$$\text{Tramo CD: } \sigma_{CD} = \frac{125000 \text{ N}}{80 \cdot 10^2 \text{ mm}^2} = 15.625 \text{ MPa (TRAC.)}$$

Diagrama de esfuerzos normales:

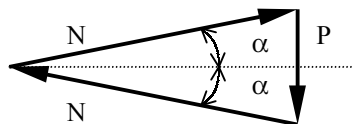


Problema 2.3

- a) Las dos barras de la figura articuladas en sus extremos, de acero, de 2 cm de diámetro y de 3.5 m de longitud, soportan un peso $P=5$ KN. Calcular el descenso δ del punto C, siendo $\alpha=20^\circ$.
 Datos: $E=2,1 \cdot 10^5$ MPa.
- b) Resolver para $\alpha=0^\circ$.

**Resolución:**

- a) Para $\alpha=20^\circ$:



Equilibrio del punto C

Del equilibrio del punto C se obtiene

$$N \sin \alpha = \frac{P}{2}$$

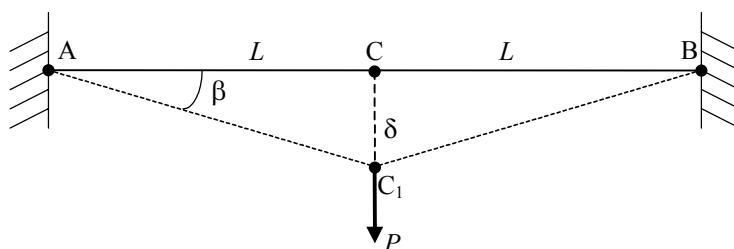
$$N = \frac{P}{2 \sin \alpha}$$

Sea δ ($\overline{CC_1}$) el descenso del punto C, entonces el alargamiento de la barra $\overline{AC}$, ΔL , será $\overline{C'C_1}$ pudiendo considerarse el triángulo $CC'C_1$ rectángulo en C' . Aquí es $\delta = \frac{\Delta L}{\sin \alpha}$. Como por otra

parte: $\Delta L = \frac{NL}{EA}$, se tiene que:

$$\delta = \frac{NL}{EA \sin \alpha} = \frac{PL}{2EA \sin^2 \alpha} = \frac{5000 \cdot 3500}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 10^2 \cdot 0,34202^2} = 1,13 \text{ mm}$$

- b) Para $\alpha=0^\circ$:



De acuerdo con la estática de los sistemas rígidos, descomponiendo la fuerza P en las direcciones de las barras, se encontrarían, para los esfuerzos en las barras y para las reacciones, valores infinitamente grandes. La solución evidentemente es inaceptable, ya que ni las barras ni los apoyos resistirían.

A fin de hacer desaparecer la aparente imposibilidad basta con considerar los alargamientos de las barras que toman direcciones no alineadas. Esto demuestra la necesidad de tener en cuenta las deformaciones en este caso.

Poniendo

$$\frac{\delta}{L} = \operatorname{tg} \beta \cong \beta \quad (\text{para ángulos pequeños})$$

el alargamiento de las barras vale

$$\varepsilon = \frac{AC_1 - AC}{AC} = \frac{\sqrt{L^2 + \delta^2} - L}{L} = \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2} - 1 = \sqrt{1 + \beta^2} - 1 \cong \frac{\beta^2}{2}$$

Esta última igualdad proviene de la expresión:

$$\sqrt{1 \pm a} = (1 \pm a)^{1/2} = 1 \pm \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 \pm \frac{1}{16}a^3 - \frac{5}{128}a^4 \pm \dots$$

Para $a \ll 1$, pueden despreciarse las potencias de a y, por tanto, queda $\sqrt{1 \pm a} = 1 \pm \frac{a}{2}$.

El esfuerzo normal en una de las barras es:

$$N = \sigma \cdot A = E \cdot \varepsilon \cdot A = \frac{E \cdot A \cdot \beta^2}{2}$$

Por otra parte, del equilibrio del punto C se deduce

$$N \cdot \operatorname{sen} \beta \approx N \cdot \beta = \frac{P}{2} \Rightarrow N = \frac{P}{2\beta} \Rightarrow \frac{E \cdot A \cdot \beta^2}{2} = \frac{P}{2\beta}$$

Resulta

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

$$\delta = \beta \cdot L = L \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{E \cdot A}}$$

Aplicando los datos numéricos del problema:

$$\delta = 3500 \cdot \sqrt[3]{\frac{5000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 3,14 \cdot 10^2}} = 148 \text{ mm}$$

$$\beta \approx \frac{\delta}{L} = \frac{148}{3500} = 0,04229 \text{ rad} = 2,42^\circ$$

$$N = \frac{P}{2\beta} = \frac{5000}{2 \cdot 0,04229} = 59116 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{59116}{314} = 188 \text{ N/mm}^2$$
