

**TEMA: ENGRANAJES. TIPOS DE ENGRANAJES.****1- ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES RECTOS.**

- 1.1- Introducción.
- 1.2- Grado de recubrimiento.
- 1.3- Interferencia.
- 1.4- Número mínimo de dientes.
- 1.5- Ventajas de los dientes con perfil de evolvente.
- 1.6- Desplazamiento de perfil.

**2- ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES INCLINADOS.**

- 2.1- Introducción.
- 2.2- Dimensiones de las ruedas.
- 2.3- Grado de recubrimiento.
- 2.4- Número mínimo de dientes.
- 2.5- Engranajes cilíndricos de dientes inclinados en ejes que se cruzan.

**3- ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES RECTOS.**

- 3.1- Introducción.
- 3.2- Dimensiones de las ruedas.
- 3.3- Grado de recubrimiento.
- 3.4- Número mínimo de dientes.

**4- ENGRANAJES DE TORNILLO SIN FIN Y CORONA.**

- 4.1- Introducción.
- 4.2- Dimensiones de las ruedas.

## 1- ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES RECTOS.

### 1.1- Introducción.

En este apartado se estudiarán los engranajes cilíndricos de dientes rectos que utilizan como perfil de los dientes la curva evolvente.

Las superficies primitivas son, para este tipo de engranajes, cilindros que ruedan sin deslizar tal y como los mostrados en la figura 1:

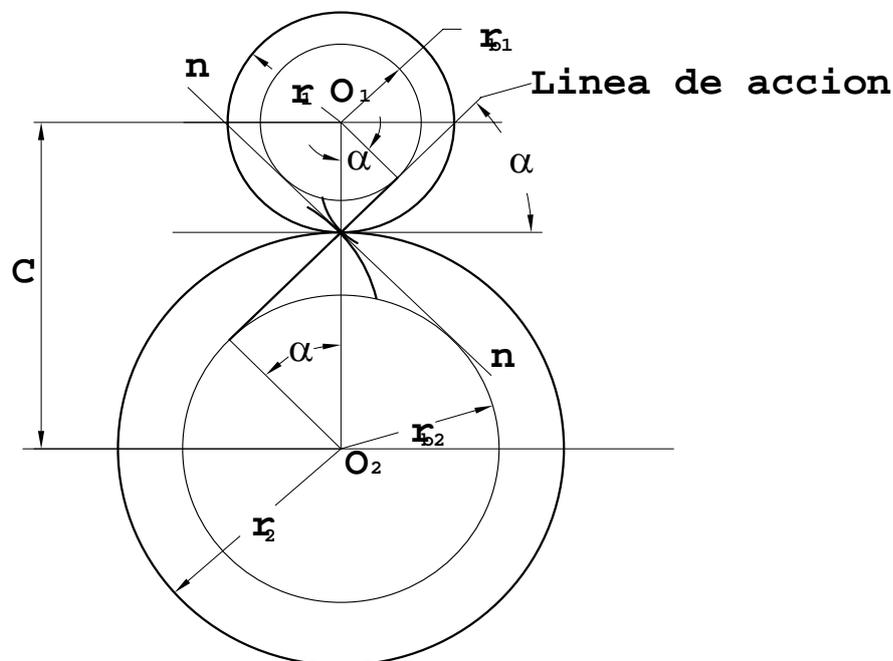


Fig-1. Generación de dientes de perfil de evolvente.

El punto  $P$ , punto donde los círculos de las superficies primitivas hacen contacto, se denominará punto de contacto o punto primitivo.

Si se suponen dos circunferencias concéntricas con las primitivas de radios  $r_{b1}$  y  $r_{b2}$  y cuya tangente común pase por el punto  $P$ , al girar dicha tangente común sobre la circunferencia de radio  $r_{b1}$ , obtendremos que la recta  $n-n$  (perpendicular a la tangente por el punto  $P$ ) genera sobre dicha rueda el perfil mostrado en la figura 1. De igual forma se generaría el perfil para la rueda 2 si la tangente común girase alrededor del círculo de radio  $r_{b2}$ .

Estos perfiles así generados son perfiles de evolvente de círculo y por otra parte son conjugados pues el contacto entre ellos siempre se localizará, por la forma de ser generados, sobre la normal común a ambos perfiles que recibe el nombre de línea de acción o línea de presión y que, en todo momento, intersecta a la línea de centros  $\overline{O_1O_2}$  en el punto  $P$ .

Los círculos que han servido de base para generar los perfiles de evolvente se denominan círculos base y sus radios se relacionan con los de los círculos primitivos mediante:

$$r_{b_1} = r_1 \cdot \cos \alpha$$

$$r_{b_2} = r_2 \cdot \cos \alpha$$

mientras que el ángulo  $\alpha$ , formado entre la horizontal y la línea de acción, recibe el nombre de ángulo de presión.

Por otra parte, puede haber tres diferentes tipos de engranajes cilíndricos de dientes rectos.

El primero de ellos es el mostrado en la figura 2 en el cual el contacto se realiza de forma que las ruedas son externas.

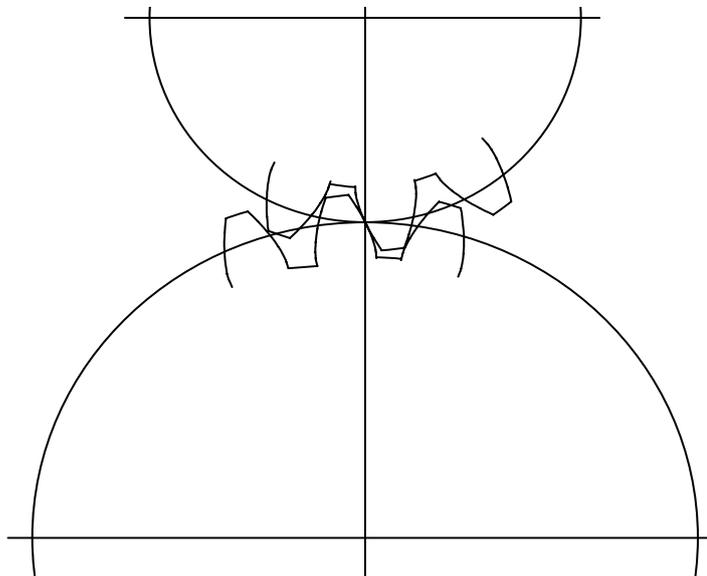


Fig-2. Ruedas cilíndricas exteriores.

El segundo tipo se da cuando el contacto se realiza por la parte interna de una de las ruedas y la externa de la otra, según se muestra en la figura 3:

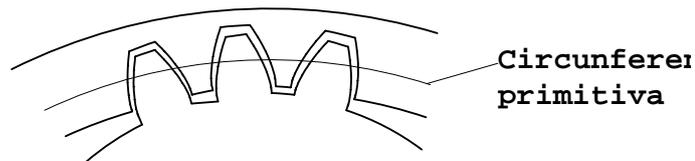


Fig-3. Ruedas cilíndricas internas.

En el tercer y último tipo de engranajes cilíndricos de dientes rectos es el mostrado en la figura 4; el diámetro primitivo de una de las ruedas es infinito, por lo tanto la circunferencia primitiva se convierte en una recta y el perfil de los dientes es también recto, formando un ángulo con la vertical igual al ángulo de presión  $\alpha$ . Este tipo de "rueda" se denomina cremallera.

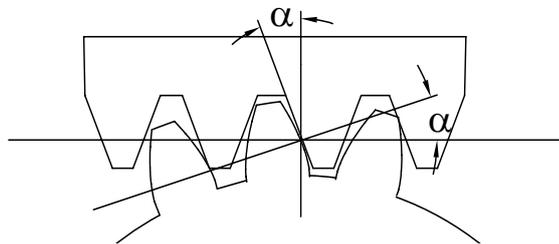


Fig-4. Cremallera.

### 1.2.-Grado de recubrimiento.

El grado de recubrimiento indica el número medio de pares de dientes que están haciendo contacto. Este dato es muy importante a la hora de calcular las tensiones en los dientes de las ruedas ya que cuanto mayor sea el grado de recubrimiento mayor será el número de dientes que soportan la fuerza que ejerce una rueda sobre la otra y, por lo tanto, menores las tensiones sufridas por estos.

A medida que un par de diente engrana, el punto de contacto se desplaza a lo largo de la línea de presión (o línea de acción) desde el punto inicial donde comienza la acción de engrane hasta el punto en el que los dientes se separan. La distancia recorrida de esta forma por el punto de contacto recibe el nombre de longitud de acción.

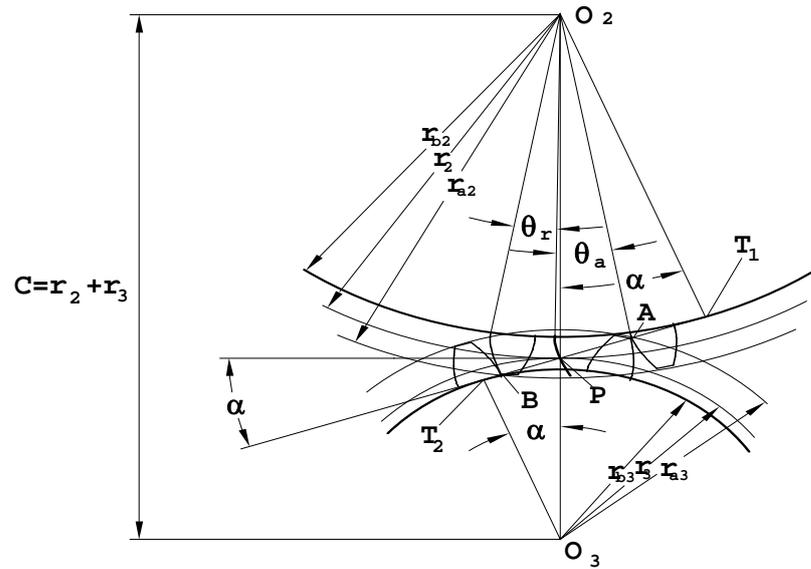


Fig-5. Longitudes y ángulos de aproximación y retroceso.

En el engranaje mostrado en la figura 5, donde la rueda 2 es conductora y la 3 conducida, el contacto comienza en el punto *A*, donde la circunferencia de cabeza de la rueda corta a la línea de presión, y termina en el punto *B*, donde la circunferencia de cabeza del piñón corta a la línea de presión.

El ángulo girado por el piñón desde que se inicia el contacto hasta que este tiene lugar en el punto primitivo,  $\theta_a$ , se denomina ángulo de aproximación. De igual forma el ángulo girado por el piñón desde que el contacto se realiza en el punto primitivo hasta que el contacto deja de tener lugar,  $\theta_r$ , se denomina ángulo de retroceso.

La longitud de acción es  $\overline{AB}$  y puede expresarse como:

$$\overline{AB} = \overline{AP} + \overline{BP}$$

Teniendo en cuenta el triángulo rectángulo  $O_3T_2A$ , se puede escribir:

$$\overline{AP} = \overline{T_2A} - \overline{T_2P} = \sqrt{r_{a_3}^2 - r_{b_3}^2} - r_3 \cdot \text{sen } \alpha$$

Operando de igual forma en el triángulo rectángulo  $O_2T_1B$  se obtiene:

$$\overline{BP} = \overline{T_1B} - \overline{T_1P} = \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - r_2 \cdot \text{sen } \alpha$$

con lo que la longitud de acción podrá expresarse de la siguiente forma:

$$\overline{AB} = \overline{AP} - \overline{BP} = \sqrt{r_{a_3}^2 - r_{b_3}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - (r_2 + r_3) \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$\overline{AB} = \sqrt{r_{a_3}^2 - r_{b_3}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - C \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Por otra parte, la distancia de un diente a otro sobre la línea de acción es el paso circular medido sobre la circunferencia base, cuyo valor es:

$$p_b = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{b_2}}{z_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{b_3}}{z_3}$$

y teniendo en cuenta la definición de grado de recubrimiento, este deberá ser igual a la relación entre la longitud de acción y el paso base; por tanto:

$$\varepsilon = \frac{\overline{AB}}{p_b}$$

puesto que:  $r_{b_2} = r_2 \cdot \cos \alpha$  y  $r_{b_3} = r_3 \cdot \cos \alpha$

$$p_b = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_2 \cdot \cos \alpha}{z_2} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_3 \cdot \cos \alpha}{z_3} = \pi \cdot m \cdot \cos \alpha$$

y la expresión del grado de recubrimiento quedará:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{a_3}^2 - r_{b_3}^2} + \sqrt{r_{a_2}^2 - r_{b_2}^2} - C \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\pi \cdot m \cdot \cos \alpha}$$

### 1.3- Interferencia.

En la figura 6 se ha representado una cremallera engranando con una rueda. La altura de cabeza de la cremallera se ha elegido de forma que el punto donde comienza el contacto es  $A$ , que es el punto de tangencia entre la línea de acción y la circunferencia base. El perfil de evolvente no está definido en el interior de la circunferencia base, por lo que el perfil representado en el interior de toda la circunferencia no será perfil de evolvente. La máxima longitud de la línea de aproximación es  $AP$  y el máximo adendo que puede ser utilizado en la cremallera es  $a$ . Si se tomase un adendo  $a' > a$ , al hacer rodar el piñón según el sentido mostrado, las posiciones que ocuparán los dientes de la cremallera y el piñón se muestran en la figura (línea discontinua) en donde se ve que los dientes de la cremallera se

solapan con los del piñón. Para que se satisfaga la ley fundamental de engrane, será necesario cortar los dientes del piñón tal y como se muestra en la figura 6. Al realizar esta operación, en el diente desaparece parte del perfil de evolvente y se reduce la longitud de contacto (y por tanto el grado de recubrimiento) dando lugar a un rebaje en el diente.

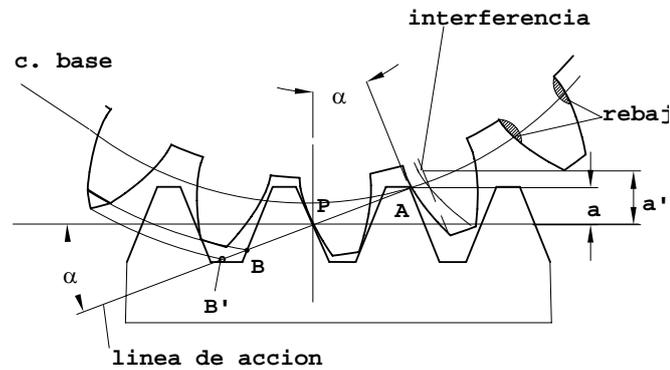


Fig-6. Interferencia

En cambio, no puede haber interferencia de los dientes del piñón con los de la cremallera debido a un aumento del adendo de los dientes del piñón ya que el punto de tangencia de la línea de acción con la circunferencia base de la cremallera está en el infinito. La longitud máxima de la de retroceso será  $PB'$  que se obtiene si el adendo del piñón se aumenta hasta que el diente termina en punta.

#### 1.4.-Número mínimo de dientes.

Para determinar si existirá interferencia entre una rueda y un piñón, se debe analizar en que punto las circunferencias de cabeza cortan a la línea de acción, tal y como se muestra en la figura 7.

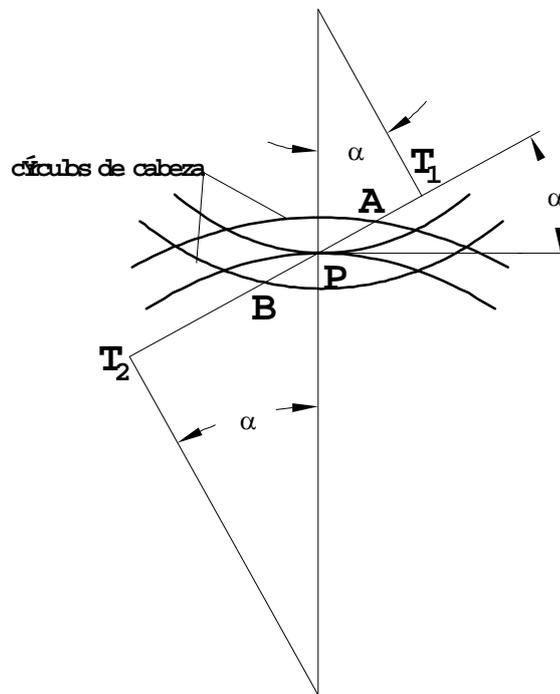


Fig.-7. Intersecciones de la línea de acción con las circunferencias de cabeza.

En el apartado anterior se vio que el punto límite es aquel en el que la línea de acción es tangente a las circunferencias base; luego si los puntos  $A$  y  $B$  (puntos de corte de las circunferencias de cabeza con la línea de contacto) quedan fuera de los puntos  $T_1$  y  $T_2$ , respectivamente, se producirá interferencia. Por lo tanto los puntos  $T_1$  y  $T_2$  son puntos límites.

Por otra parte, la posibilidad de que exista interferencia dependerá del tamaño del piñón, será menor cuanto mayor sea su diámetro, pues más alejado del punto  $P$  se encontrará el punto  $T_1$ .

El problema que ahora se plantea es determinar cual es el mínimo número de dientes que pueden tallarse sin que exista interferencia. Teniendo en cuenta la indicación límite para que no exista interferencia (punto  $A$  coincidente con  $T_1$ ) atendiendo a la figura 8, se obtendrá:

$$\text{sen } \alpha = \frac{AP}{r}$$

por otra parte:

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{AP}$$

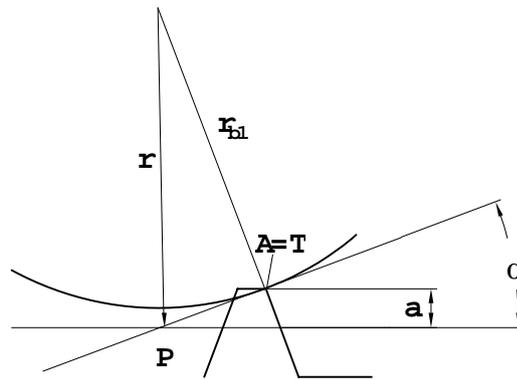


Fig-8. Condición límite de interferencia.

Multiplicando ambas expresiones:

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{a}{r}$$

Puesto que la altura de cabeza se expresa en función del módulo

$$a = k \cdot m \quad \text{siendo} \quad m = \frac{d}{z} = \frac{2 \cdot r}{z}$$

de donde se obtiene:

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{k \cdot 2 \cdot r}{z \cdot r} = \frac{2 \cdot k}{z}$$

Siendo el número mínimo de dientes:

$$z = \frac{2 \cdot k}{\text{sen}^2 \alpha}$$

### 1.5.-Ventajas de los dientes con perfil de evolvente.

Quizás la mayor ventaja de los dientes con perfil de evolvente se encuentre en la simplicidad que supone su fabricación en serie mediante las máquinas especiales construidas con tal fin: las talladoras de ruedas dentadas. En este curso no se entrará a explicar el tema del tallado de las ruedas dentadas pues esta materia es propia de una asignatura de tecnología mecánica.

Otra importante ventaja es que la variación de la distancia entre los centros de las ruedas no afecta a la relación de transmisión que seguirá siendo constante; es decir, se seguirá cumpliendo la ley fundamental de engrane.

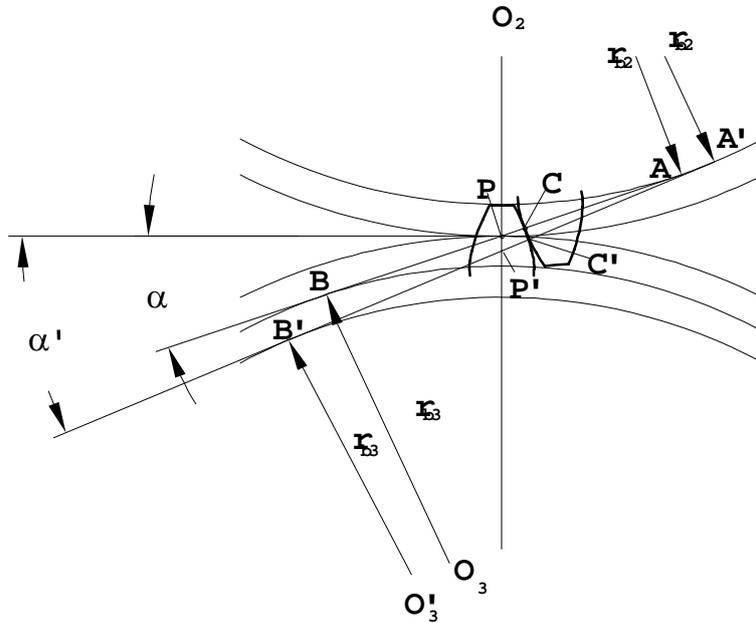


Fig.-9. Aumento de la distancia entre centro de un engranaje.

En la figura 9 el centro de la rueda ha sido desplazado de  $O_3$  a  $O'_3$ , localizándose el nuevo punto primitivo en  $P'$ . La relación de transmisión cuando el punto primitivo es  $P$ , según lo visto, tiene el valor:

$$i = \frac{BP}{AP}$$

teniendo en cuenta la equivalencia de los triángulos  $O_3BP$  y  $O_2AP$ .

$$\frac{BP}{BO_3} = \frac{AP}{AO_2}$$

$$\frac{BP}{AP} = \frac{BO_3}{AO_2} = \frac{r_{b3}}{r_{b2}}$$

$$i = \frac{BP}{AP} = \frac{BO_3}{AO_2} = \frac{r_{b3}}{r_{b2}}$$

Cuando varía la distancia entre centro  $O_2$  y el centro  $O_3$ , el punto primitivo se localizará en  $P'$  realizándose el contacto en  $C'$  sobre la nueva línea de acción  $A'B'$  (cuyo ángulo de presión es  $\alpha' > \alpha$ ); por lo tanto, la relación de transmisión tendrá el valor:

$$i' = \frac{B'P'}{A'P'}$$

Si se tiene en cuenta la equivalencia entre los triángulos  $O'_3B'P'$  y  $O_2A'P'$  :

$$\frac{B'P'}{B'O'_3} = \frac{A'P'}{A'O_2}$$

$$\frac{B'P'}{A'P'} = \frac{BO'_3}{A'O_2} = \frac{r_{b_3}}{r_{b_2}}$$

$$i' = \frac{B'P'}{A'P'} = \frac{B'O'_3}{A'O_2} = \frac{r_{b_3}}{r_{b_2}}$$

Por tanto, la nueva relación de transmisión coincide con la relación de transmisión antes de aumentar la distancia entre centros, esto es:

$$i = i' = \frac{r_{b_3}}{r_{b_2}} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_3}$$

El ángulo de presión si habrá variado, su nuevo valor puede deducirse fácilmente atendiendo a la figura 9 siendo este:

$$\cos \alpha' = \frac{r_2 + r_3}{C'} \cos \alpha = \frac{C}{C'} \cos \alpha$$

Por otra parte, según se aprecia en la figura 10, las circunferencias de rodadura aumentan, no coincidiendo con las primitivas, y se hacen mayores los juegos de cabeza y de los flancos.

### 1.6.- Desplazamiento de perfil.

La propiedad estudiada en el apartado anterior, puede utilizarse para obtener un desplazamiento del perfil de los dientes.

En la parte izquierda de la figura 10 se representa una rueda cuyo centro ha sido alejado del de la rueda con la que engrana. Como se ve, han aumentado los juegos de cabeza y de los flancos. Para reducir estos juegos a su medida original se deben aumentar las circunferencias de cabeza y de pie de la rueda 2, y además aumentar el espesor del diente tal y como se muestra en la parte derecha de la figura 10. Una vez realizada esta operación, las ruedas vuelven a engranar como antes de proceder a aumentar la distancia entre centros.

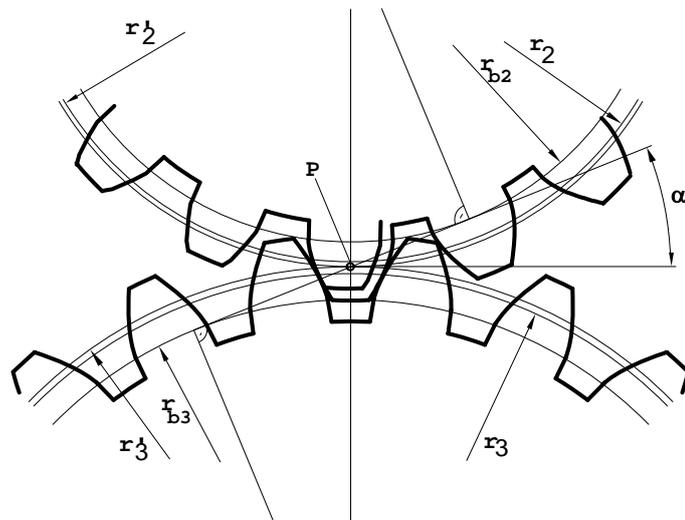


Fig-10. Rueda desplazada y rueda con desplazamiento de perfil.

Para conseguir este desplazamiento de perfil se debe alejar la herramienta, a la hora de tallar la rueda, la distancia  $xm$  de la posición que ocuparía cuando la rueda que se fuese a tallar no presentase desplazamiento, según se muestra en la figura 11. A la magnitud  $x$  se le denomina factor de desplazamiento de perfil, siendo  $m$  el módulo. Este tipo de desplazamiento, en el que la herramienta se aleja, recibe el nombre de desplazamiento de perfil positivo, y con él se obtienen las siguientes ventajas:

- Se disminuye el riesgo de rebajar los dientes debido al aumento del ángulo de presión.
- Se ensancha el pie de diente de forma que pueden transmitirse mayores potencias.
- Se posibilita una variación de la distancia entre los ejes en determinadas condiciones de montaje.

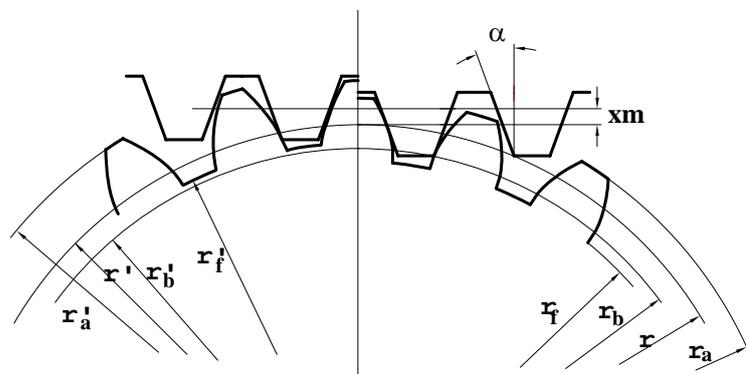


Fig-11. Desplazamiento de perfil positivo.

En el caso de que el desplazamiento que se da a la herramienta sea de forma que se acerque al centro de la rueda que va a ser tallada, el desplazamiento de perfil se denomina negativo. Con este tipo de desplazamiento se reduce la circunferencia de cabeza de la rueda, se aumenta el peligro de rebajar los dientes, estos resultan más pequeños (disminuye su espesor) y el ángulo de presión obtenido al engranar con una rueda sin desplazamiento es menor.

En la parte izquierda de la figura 11 se muestra el desplazamiento que se da a la cremallera para lograr una rueda con desplazamiento de perfil positivo, en comparación con una rueda sin desplazamiento de perfil (parte de la derecha).

Las dimensiones obtenidas en una rueda con desplazamiento de perfil serán:

- Radio de la circunferencia primitiva:  $r' = r = \frac{z \cdot m}{2} = \frac{d}{2}$
- Radio de la circunferencia base:  $r'_b = r_b = r \cdot \cos \alpha$
- Radio de la circunferencia de cabeza:  $r'_a = r + h_1 + x \cdot m$
- Radio de la circunferencia de pie:  $r'_f = r - h_2 + x \cdot m$

## 2.- ENGRANAJES CILINDRICOS DE DIENTES INCLINADOS.

### 2.1.- Introducción.

Las ruedas con dientes inclinados tienen dientes dispuestos de forma inclinada respecto a sus ejes, según se observa en la figura 12. El ángulo que forma la línea del flanco en el cilindro primitivo con el eje de la rueda se denomina ángulo de inclinación  $\beta$ .

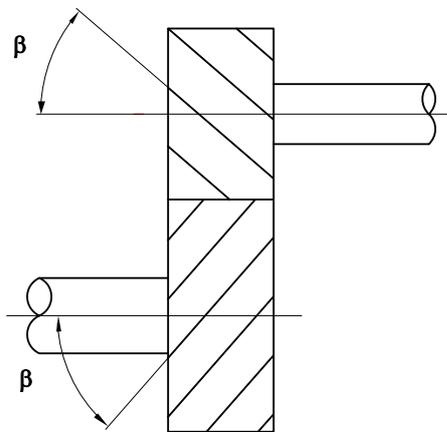


Fig-12. Engranaje de ruedas con dientes inclinados.

Cuando dos ruedas de dientes inclinados se emparejan para formar un engranaje de ejes paralelos, las inclinaciones de los dientes deben coincidir en el punto de rodadura; es decir, ambos dentados deben tener el mismo ángulo de inclinación pero en sentidos contrarios, según se muestra en la figura 12.

En este tipo de engranajes los flancos de los dientes no hacen contacto bruscamente, como en los de ruedas de dientes rectos, sino de forma gradual por lo que pueden utilizarse para transmitir cargas elevadas a altas velocidades resultando su funcionamiento más silencioso que en los anteriores.

Los ángulos de inclinación, normalmente, están comprendidos entre  $8^\circ$  y  $25^\circ$ . Ángulos más pequeños no merecen la pena, mientras que mayores producen una carga axial muy alta sobre las ruedas, que debe ser absorbida por los cojinetes de los ejes.

## 2.2- Dimensiones de las ruedas.

El dentado inclinado puede obtenerse con herramienta de módulo normal siempre y cuando esta se ajuste, durante el tallado, con un ángulo de inclinación  $\beta$ . Por este motivo se obtendrá un dentado normal en la sección situada de forma perpendicular a la línea de los flancos de los dientes, tal y como se aprecia en la figura 13, mientras que en la sección perpendicular al eje de rotación de la rueda se obtendrá un dentado frontal cuyas principales características y dimensiones se estudiarán a continuación.

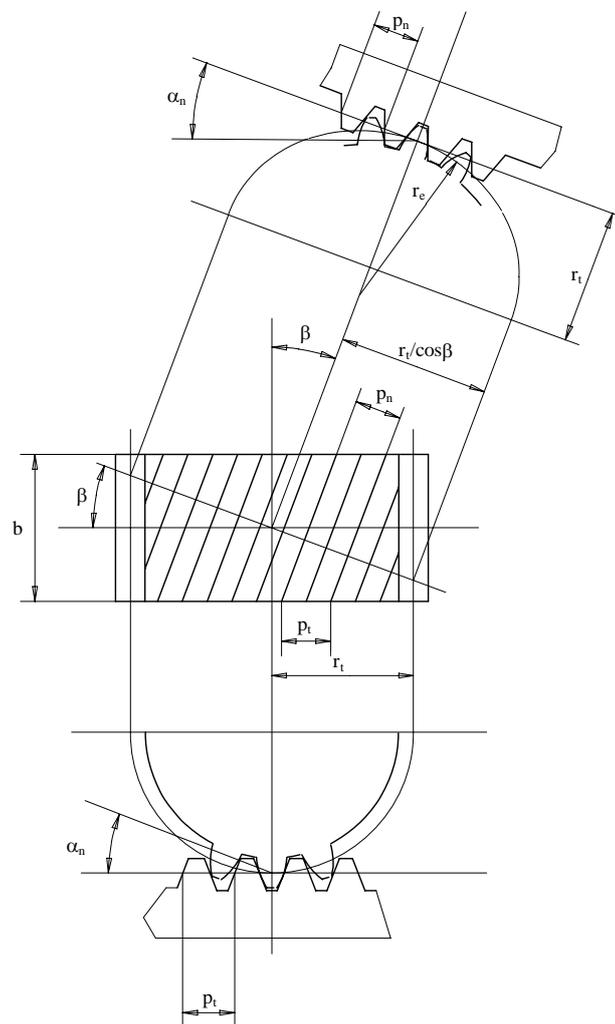


Fig-13. Dimensiones de las ruedas de dientes inclinados.

En este tipo de ruedas el ángulo de presión frontal ( $\alpha_t$ ) es diferente del normal ( $\alpha_n$ ) de forma que  $\alpha_t > \alpha_n$ . La relación que existe entre estos ángulos puede obtenerse de la figura 14, en la que se representa la sección normal y frontal de una cremallera. Observando la sección normal se deduce que:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha_n}$$

mientras que de la sección frontal se obtiene:

$$b = \frac{a'}{\operatorname{tg} \alpha_t}$$

Igualando ambas expresiones teniendo en cuenta que  $a = a' \cos \beta$ :

$$\frac{a' \cdot \cos \beta}{\operatorname{tg} \alpha_n} = \frac{a'}{\operatorname{tg} \alpha_t}$$

De donde se deduce que la relación que liga el ángulo de presión frontal con el normal y con el ángulo de inclinación es:

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\cos \beta}$$

Por otra parte la distancia que existe entre dos puntos homólogos de los perfiles de dos dientes consecutivos sobre la sección frontal se denomina paso frontal, y su valor es (ver figura 13):

$$p_t = \frac{p_n}{\cos \beta}$$

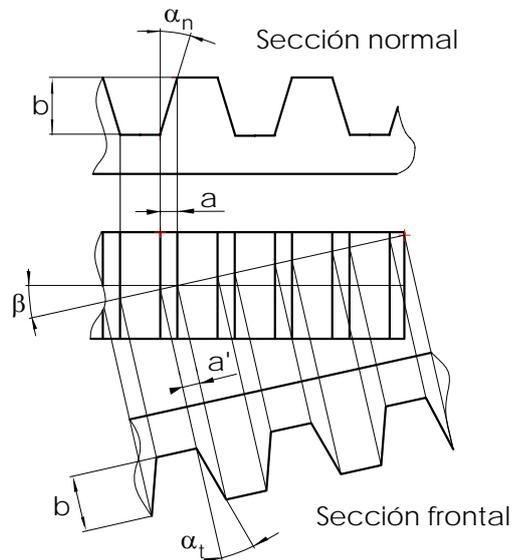


Fig-14. Relación entre los ángulos de presión frontal y normal.

La relación entre el paso y el módulo frontal es:

$$m_t = \frac{p_t}{\pi}$$

mientras que los módulos frontal y normal se relacionan mediante:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

### 2.3- Grado de recubrimiento:

El grado de recubrimiento deberá calcularse en la parte frontal del diente, por lo que las ecuaciones deducidas para engranajes de dientes rectos podrán aplicarse siempre y cuando se tenga en cuenta los nuevos parámetros que definen el dentado en la sección frontal de las ruedas; por lo tanto el grado de recubrimiento calculado sobre la sección frontal será:

$$\varepsilon_t = \frac{\sqrt{r_{ta3}^2 - r_{tb3}^2} + \sqrt{r_{ta2}^2 - r_{tb2}^2} - C \cdot \operatorname{sen} \alpha_t}{\pi \cdot m_t \cdot \cos \alpha_t}$$

Siendo:  $C=r_{t2}+r_{t3}$  la distancia entre centros.

$r_{t2}$  y  $r_{t3}$  los radios de las circunferencias primitivas en la sección frontal.

$r_{tb} = r_t \cos \alpha_t$  el radio de la circunferencia base.

$r_{ta} = r_t + h_a$  el radio de la circunferencia de cabeza.

$h_a$  la altura de cabeza del diente.

$\alpha_t$  el ángulo de presión frontal.

$m_t$  el módulo frontal.

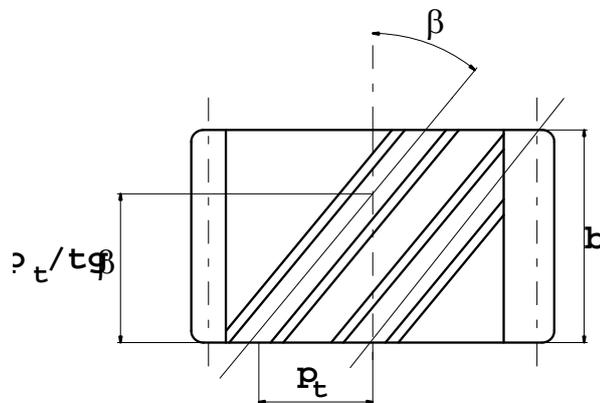


Fig-15. Recubrimiento de salto.

Pero en este tipo de ruedas existe otro recubrimiento, denominado de salto, debido a la inclinación de los dientes que puede observarse en la figura 15. El valor del recubrimiento de salto es igual a:

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b}{p_t / \operatorname{tg} \beta} = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta}{p_t}$$

Esto es debido a que la distancia  $p_t / \operatorname{tg} \beta$  puede ser considerada como el paso axial en un tornillo, mientras que  $b$  sería la altura de la tuerca obteniéndose, por tanto, que el número de filetes (flancos de dientes en realidad) que hacen contacto es la relación existente entre la altura de la tuerca y el paso del tornillo.

Por tanto, el grado de recubrimiento total en engranajes de ruedas con dientes inclinados será suma del grado de recubrimiento en la sección frontal más el recubrimiento de salto, obteniéndose:

$$\varepsilon = \varepsilon_t + \varepsilon_{\beta}$$

#### 2.4- Número mínimo de dientes.

En la figura 13 se muestra una sección normal de una rueda con dientes inclinados; esta sección forma un ángulo  $\beta$  con la sección frontal de la rueda, y en su intersección con la circunferencia primitiva de radio  $r_t$  se obtiene una elipse de semiejes  $r_t$  y  $r_t / \cos \beta$ . El radio de curvatura de la elipse en el punto primitivo es  $r_e$  y se denomina radio primitivo equivalente. Puede demostrarse<sup>1</sup> que el valor del radio primitivo equivalente es:

$$r_e = \frac{r_t}{\cos^2 \beta}$$

El radio primitivo equivalente representa el radio de la circunferencia primitiva de la rueda de dientes rectos equivalente cuyo número de dientes es:

<sup>1</sup> La ecuación de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , mientras que el valor del radio de curvatura viene dado por  $\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/d^2x}$ . Sustituyendo en la expresión del radio de curvatura los valores obtenidos

de la ecuación de la elipse para  $x=0, y=b$  se obtiene:

$$\rho = \frac{a^2}{b}$$

$$z_e = \frac{2 \cdot r_e}{m_n} = \frac{d_e}{m_n}$$

Teniendo en cuenta que:

$$m_n = m_t \cdot \cos \beta \quad \text{y} \quad r_e = \frac{r_t}{\cos^2 \beta}$$

el número de dientes de la rueda equivalente con dientes rectos será de:

$$z_e = \frac{2 \cdot r_t}{m_t \cdot \cos^3 \beta} = \frac{d_t}{m_t} \cdot \frac{1}{\cos^3 \beta}$$

y puesto que  $d_t/m_t$  es el número de dientes de la rueda de dientes inclinados, se obtendrá que la relación entre el número de dientes de la rueda equivalente y el número de dientes real es:

$$z_e = \frac{z}{\cos^3 \beta}$$

Por este motivo el número mínimo de dientes de la rueda de dientes inclinados se calculará mediante:

$$z_{min} = z_{e\ min} \cdot \cos^3 \beta$$

siendo  $z_{e\ min}$  el número mínimo de dientes para una rueda de dientes rectos.

## 2.5- Engranajes cilíndricos de dientes inclinados en ejes que se cruzan.

Cuando se quiere transmitir movimiento entre ejes que se cruzan pueden utilizarse ruedas cilíndricas con dentado inclinado. En este caso el contacto que realizan los dientes entre si es puntual, por lo que sólo deben de ser utilizados para transmitir cargas muy pequeñas.

La forma de construirse las ruedas para este tipo de engranaje es la misma que la vista para los engranajes de ejes paralelos y la diferencia sólo existe una vez que se montan para constituir el engranaje.

La relación que existe entre el ángulo que forman los ejes y los ángulos de inclinación de los dientes en cada una de las ruedas es:

$$\Sigma = \beta_2 \pm \beta_3$$

El signo positivo se utilizará cuando las inclinaciones de los dientes tengan el mismo sentido en ambas ruedas (figura 16-a), mientras que el signo negativo cuando los sentidos son los contrarios (figura 16-b). Se deberá utilizar sentidos contrarios de inclinación de los dientes cuando los ángulos que formen los ejes sean pequeños.

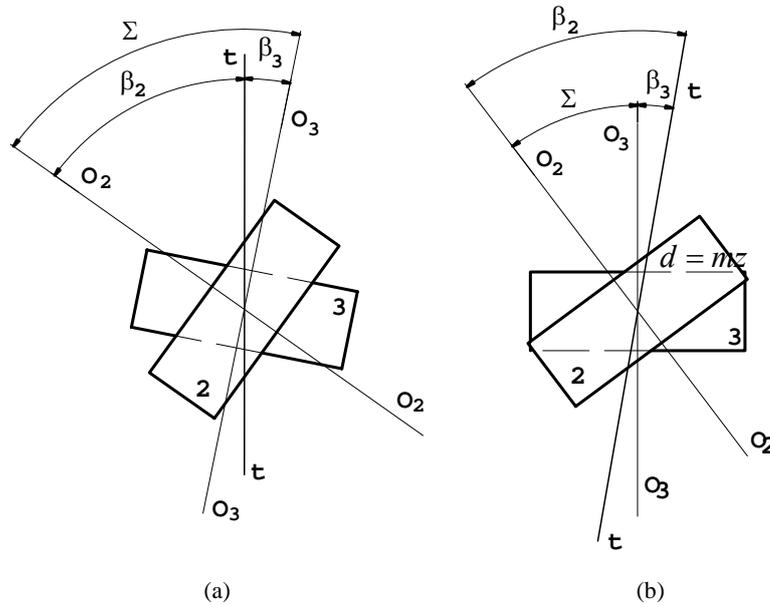


Fig-16. Engranajes de dientes inclinados en ejes que se cruzan

Cuando se especifica el tamaño de los dientes siempre debe hacerse en base a la sección normal, ya que al poder ser diferentes los ángulos de inclinación de los dientes de cada rueda, también serán diferentes los módulos frontales para cada una de ellas.

El diámetro primitivo de cada una de las ruedas se obtendrá de:

$$d = m_t \cdot z$$

y puesto que:

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta}$$

se obtendrá que el número de dientes de cada rueda se relaciona con el ángulo de inclinación mediante:

$$z = \frac{d \cdot \cos \beta}{m_n}$$

Por lo tanto, la relación de transmisión será:

$$i = \frac{z_3}{z_2} = \frac{d_3 \cdot \cos \beta_3}{d_2 \cdot \cos \beta_2} \neq \frac{d_3}{d_2}$$

de donde se desprende que la relación de transmisión será igual a la relación entre diámetros únicamente en el caso de que los ángulos de inclinación de los dientes sean los mismos para las dos ruedas.

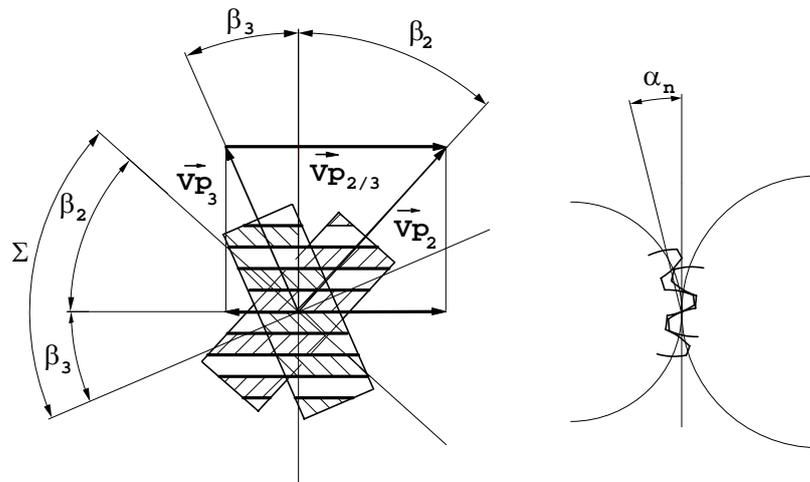


Fig-17. Sección normal de un engranaje para ejes que se cruzan.

Por otra parte, según se muestra en la figura 17, las velocidades de los puntos de contacto de cada una de las ruedas van a ser diferentes, aunque sus proyecciones sobre la normal común deberán ser iguales. Por este motivo aparece una velocidad de deslizamiento cuyo módulo tendrá el valor:

$$v_{P_{2/3}} = v_{P_{3/2}} = v_{P_2} \cdot \text{sen } \beta_2 + v_{P_3} \cdot \text{sen } \beta_3$$

El grado de recubrimiento se calculará como si se tratara de un engranaje de ruedas cilíndricas de dientes rectos, pero utilizando los números de dientes equivalentes para cada una de las ruedas ( $z_{e2} = z_2 / \cos^3 \beta_2$  y  $z_{e3} = z_3 / \cos^3 \beta_3$ ) y el módulo normal.

### 3.-ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES RECTOS.

#### 3.1- Introducción

Los engranajes cónicos de dientes rectos se utilizan para transmitir movimiento y potencia entre ejes que se cortan. Sus superficies primitivas son conos de fricción, por tanto ya se ha estudiado cual es la relación que deben cumplir los ángulos de cada uno de los conos primitivos con el ángulo formado por los ejes y la relación de transmisión.

Los flancos de los dientes de las ruedas cónicas se forman mediante el desarrollo de una evolvente cónica según se aprecia en la figura 18. Por este motivo todos los puntos de la evolvente equidistan la distancia  $R$  del vértice del cono base (cono que sirve de base para la generación de la evolvente cónica); luego la evolvente será generada sobre una superficie esférica y es, por tanto, una evolvente esférica.

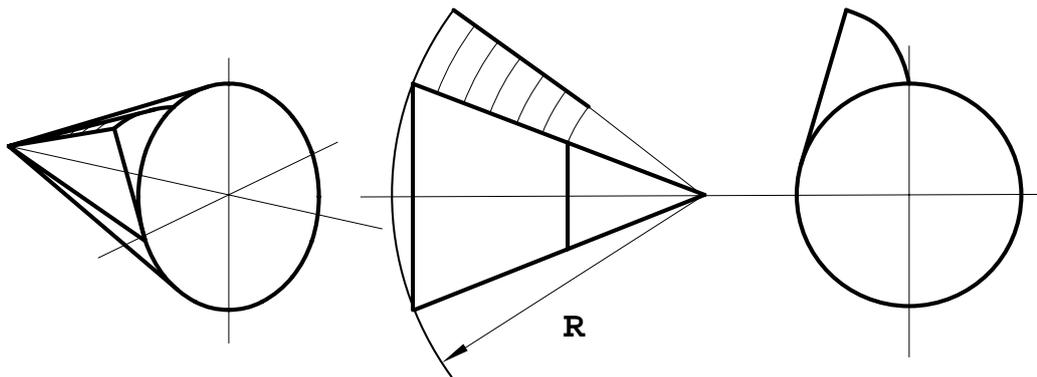


Fig-18. Evolvente esférica sobre el cono base

Dicha superficie esférica, en el campo del dentado, puede aproximarse a una superficie cónica cuando la rueda tenga más de ocho dientes (aproximación de Tredgold) según se aprecia en la figura 19. El cono que se utiliza de aproximación se denomina cono complementario o de respaldo y su superficie exterior puede desarrollarse en un plano formando una sección circular. Sobre este desarrollo los dientes aparecen de la misma forma que sobre una rueda cilíndrica de dientes rectos (rueda complementaria), y a esta rueda ficticia debe ajustarse el perfil de referencia de la cremallera. El radio de la rueda complementaria es:

$$r_c = \frac{r}{\cos \delta}$$

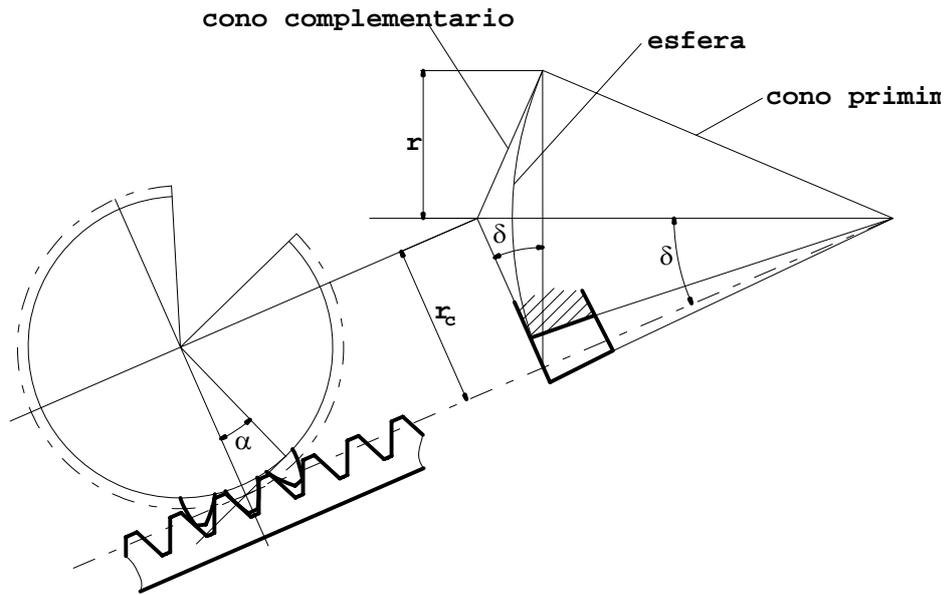


Fig-19. Desarrollo de la superficie del cono complementario.

**3.2- Dimensiones de las ruedas.**

En la figura 20 se representa seccionada una rueda cónica de dientes rectos con sus dimensiones principales.

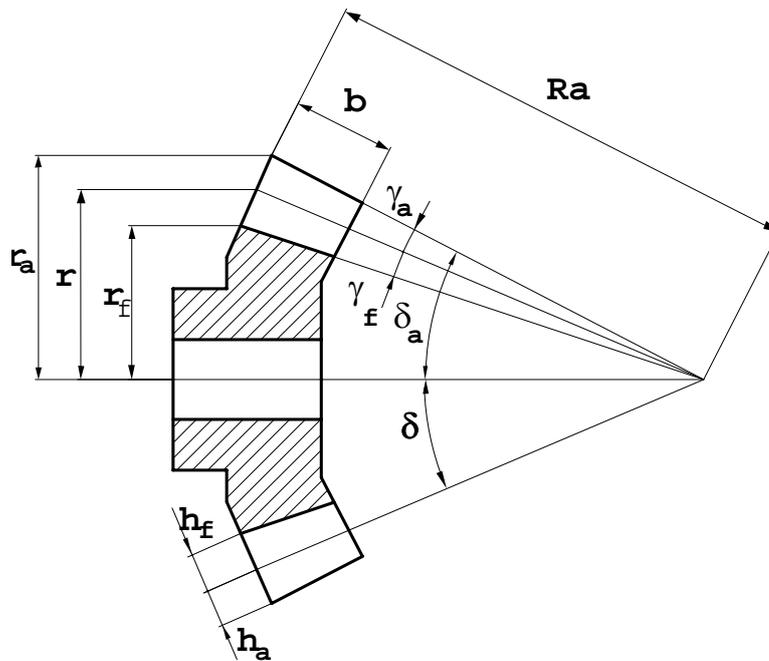


Fig-20. Sección de una rueda cónica de dientes rectos.

El radio de la circunferencia primitiva es  $r$ , y su valor se obtiene de:

$$d = 2 \cdot r = z \cdot m \Rightarrow r = \frac{z \cdot m}{2}$$

La altura de cabeza es  $h_a$  y generalmente  $h_a = m$ .

La altura de pie es  $h_f$  y por lo general  $h_f = 1,2 m$ .

La longitud de la generatriz del cono primitivo es  $R_a$ , y se corresponde al radio de una rueda plana que engranase con la rueda cónica.

El radio de la circunferencia de cabeza es  $r_a = r + h_a \cos \delta$ .

El radio de la circunferencia de pie es  $r_f = r - h_f \cos \delta$ .

El ángulo del cono primitivo es  $\delta$ , mientras que los ángulos de los conos de cabeza y pie son:

$$\delta_a = \delta + \gamma_a \text{ y } \delta_f = \delta - \gamma_f$$

siendo  $\gamma_a$  y  $\gamma_f$  los ángulos de cabeza y pie obtenidos de:

$$\operatorname{tg} \gamma_a = \frac{h_a}{R_a}, \quad \operatorname{tg} \gamma_f = \frac{h_f}{R_a}$$

El ancho de los dientes es  $b$ , y debe tomarse la menor de las siguientes relaciones:

$$b \leq 10 \cdot m \quad \text{o} \quad b \leq \frac{R_a}{3}$$

Esto es debido a que las ruedas cónicas suelen montarse en la parte del eje que cae fuera de los cojinetes de este, y la propia flexión del eje hace que no coincida el vértice teórico de los conos, soportando una mayor porción de la carga la parte posterior de los flancos.

### 3.3- Grado de recubrimiento.

El grado de recubrimiento se calculará teniendo en cuenta las ruedas cilíndricas de dientes rectos obtenidas mediante el desarrollo de los conos complementarios; de esta manera el valor del grado de recubrimiento para el engranaje mostrado en la figura 21 será:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{r_{ca_3}^2 - r_{cb_3}^2} + \sqrt{r_{ca_2}^2 - r_{cb_2}^2} - C_c \cdot \operatorname{sen} \alpha}{\pi \cdot m \cdot \operatorname{cos} \alpha}$$

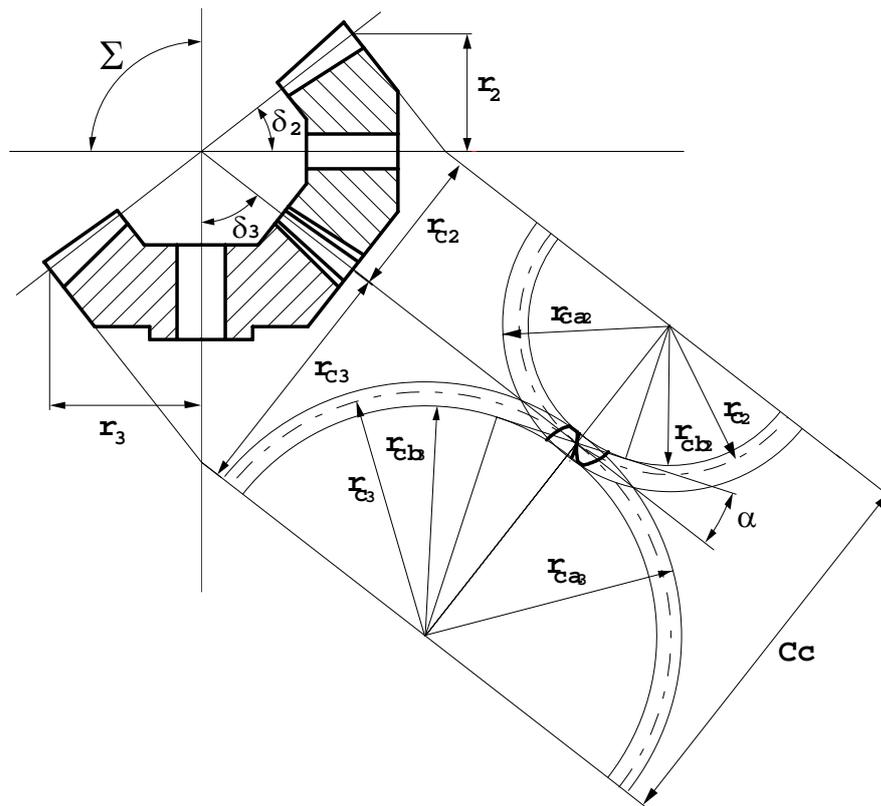


Fig-21. Desarrollo de los conos complementarios de un engranaje de ruedas cónicas.

Siendo:

$$r_{ca} = r_c + h_a = \frac{r}{\cos \delta} + h_a$$

$$r_{cb} = r_c \cdot \cos \alpha = \frac{r \cdot \cos \alpha}{\cos \delta}$$

$$C_c = r_{c2} + r_{c3} = \frac{r_2}{\cos \delta_2} + \frac{r_3}{\cos \delta_3}$$

### 3.4- Número mínimo de dientes.

Al igual que el grado de recubrimiento, el número mínimo de dientes se calculará en base a la rueda complementaria.

La relación que existe entre el radio de la circunferencia primitiva en la rueda cónica y en la rueda complementaria es, como se ha visto:

$$r_c = \frac{r}{\cos \delta}$$

los radios de la rueda cónica y la rueda complementaria en función del módulo y del número de dientes son respectivamente:

$$r = \frac{m \cdot z}{2} \quad y \quad r_c = \frac{m \cdot z_c}{2}$$

que sustituido en la anterior:

$$\frac{m \cdot z_c}{2} = \frac{m \cdot z}{2 \cdot \cos \delta}$$

expresión de la que se obtiene el número de dientes de la rueda complementaria en función de los de la rueda cónica:

$$z_c = \frac{z}{\cos \delta}$$

denominado número de dientes complementarios o número de dientes virtual.

Teniendo en cuenta el número mínimo de dientes para una rueda cilíndrica de dientes rectos, se obtendrá que para una rueda cónica este será de:

$$z_{min} = z_{Cmin} \cdot \cos \delta$$

siendo  $z_{Cmin}$  el número mínimo de dientes para una rueda cilíndrica de dientes rectos.

#### **4- ENGRANAJES DE TORNILLO SIN FIN Y CORONA.**

##### **4.1- Introducción.**

Los engranajes de tornillo sin fin y corona no son sino engranajes cilíndricos de dientes rectos para ejes que se cruzan (utilizados generalmente para 90° entre ejes). La principal diferencia estriba en que la corona (rueda conducida) se construye normalmente de forma globoide, por este motivo el contacto pasa de ser puntual a lineal. El tornillo puede también tener forma globoide, aunque debido a la dificultad que presenta fabricarlo así suele utilizarse con forma cilíndrica, pudiendo disponer de una o de más entradas.

Este tipo de engranajes se utilizan para conseguir una gran relación de transmisión en un espacio reducido.

#### 4.2- Dimensiones de las ruedas.

En la figura 22 se ha representado un engranaje de tornillo sin fin y corona indicando sus dimensiones generales. Puede verse, también, una sección normal del tornillo.

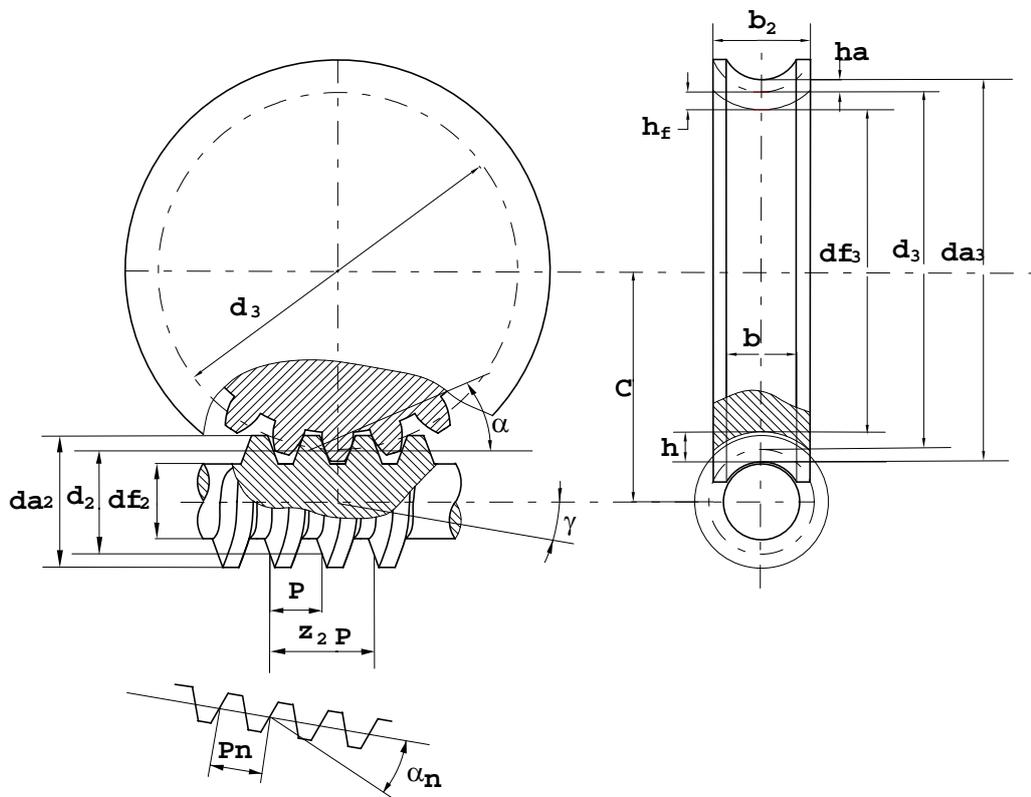


Fig-22. Engranaje de tornillo sin fin y corona.

Se denomina número de forma del tornillo a la relación:

$$z_F = \frac{d_2}{m}$$

El ángulo  $\gamma$  se define como el ángulo de avance y su valor se obtiene del desarrollo de la hélice del tornillo, donde  $z_2 p$  es el avance por vuelta, por lo tanto:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_2 \cdot p}{\pi \cdot d_2}$$

pero al ser el módulo  $m = p / \pi$ :

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{z_2 \cdot m}{d_2} = \frac{z_2}{z_F}$$

La relación entre el módulo y el módulo normal viene dada por:  $m_n = m \cdot \cos \gamma$  y entre los pasos axial y normal es:  $p_n = p \cdot \cos \gamma$

El diámetro del círculo medio es  $d_2 = m z_F$ , mientras que los de las circunferencias de cabeza y de pie son, respectivamente:

$$d_{a2} = d_2 + 2h_a$$

$$d_{f2} = d_2 - 2h_f$$

siendo  $h_a$  la altura de cabeza de diente ( $h_a = m$ ), y  $h_f$  la altura de pie de diente ( $h_f = 1,2 m$ ).

El diámetro de la circunferencia primitiva de la rueda viene dado por:  $d_3 = m z_3$ , y los de las circunferencias de cabeza y pie son:

$$d_{a3} = d_3 + 2h_a$$

$$d_{f3} = d_3 - 2h_f$$

La relación de transmisión para este tipo de engranajes es:

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{z_3}{z_2}$$

Siendo  $z_3$  el número de dientes de la corona mientras que  $z_2$  son las entradas de que dispone el tornillo.

Al igual que para los engranajes de dientes inclinados, existirá una velocidad de deslizamiento en los flancos de los dientes, por lo que se producirá en estos un desgaste considerable debido al rozamiento.

**BIBLIOGRAFIA:**

Título: ELEMENTOS DE MAQUINAS.

Autor: K. H. Decker.

Editorial: Urmo.

Título: KINEMATICS AND DYNAMICS OF MACHINES.

Autor: Geroge H. Martin.

Editorial: McGraw Hill.

Título: MECHANICS OF MACHINES.

Autor: Samuel Doughty.

Editorial: John Wiley & Sons.

Título: MECANICA DE MAQUINAS.

Autor: Ham, Crame, Rogers.

Editorial: McGraw-Hill.

Título: CINEMATICA Y DINAMICA DE MAQUINAS.

Autor: A. de Lamadrid.

Editorial: Sección de Publicaciones ETSII de Madrid.

Título: TEORIA DE MAQUINAS Y MECANISMOS.

Autor: Joseph E. Shigley.

Editorial: McGraw-Hill.