APLICACIONES DEL TEOREMA DE TRANSPORTE

Forma diferencial de la Ecuación de continuidad:

Consideremos un volumen de control infinitesimal, fijo respecto a un sistema de coordenadas x,y,z, inmerso en un flujo con $\vec{V}(x, y, z, t)$.

Calcularemos el flujo neto por unidad de tiempo en el volumen de control

Primero consideramos las superficies 1 y 2, paralelas al plano YZ.

Los caudales que atraviesan las caras 1 y 2 son, respectivamente:

$$-\rho V_x dydz, \qquad \left(\rho V_x + \frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dx\right) dydz$$

El caudal neto a través de estas 2 superficies es:

$$\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} dxdydz$$

Realizando análogo cálculo para los otros dos pares de caras, y sumando los resultados, obtenemos:

$$Caudal \quad neto = \left(\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}\right) dxdydz$$

Esto es igual a la tasa de disminución de masa en el interior del volumen de control: $-\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$

Por lo tanto

$$\left(\frac{\partial(\rho V_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z}\right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Desarrollando las derivadas se obtiene:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \bullet \vec{V} = 0$$

Ecuaciones de la cantidad de movimiento

Consideremos la cantidad de movimiento lineal de la masa de un sistema elemental, dm. Esta es la magnitud vectorial $dm\vec{V}$

El principio de Newton, se expresa:

$$d\vec{F} = \frac{D}{Dt}(dm\vec{V}) = dm\left(V_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + V_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

La fuerza superficial, en ausencia de esfuerzos de corte, se puede representar únicamente en términos de gradientes de presión.

La fuerza neta sobre el volumen de control en una dirección es:

$$-\frac{\partial p}{\partial y}dy\,dxdz$$

Y similares términos en las otras direcciones. La fuerza total es:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{k}\right)dxdydz = -\nabla p dv$$

Luego la fuerza de presión por unidad de masa:

$$-\frac{\nabla p dv}{dm} = -\frac{\nabla p dv}{\rho dv} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

La fuerza en el volumen es la de gravedad y actúa en el sentido negativo del eje z:

$$-gdm\vec{k} = -g(\rho dv)\vec{k} = -g\nabla z\rho dv$$

Las ecuaciones de cantidad de movimiento quedan:

$$-\nabla p dv - g\rho dv\nabla z = dm\left(V_x\frac{\partial\vec{V}}{\partial x} + V_y\frac{\partial\vec{V}}{\partial y} + V_z\frac{\partial\vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)$$

Es decir:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = \left(V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

Que son las Ecuaciones de Euler para fluido no viscoso.

Tenemos en consecuencia dos leyes fundamentales establecidas en forma diferencial.

Bajo notación vectorial se pueden escribir:

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z = (\vec{V} \bullet \nabla)\vec{V} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \bullet (\rho \vec{V}) = 0$$

Estas ecuaciones son para sistemas diferenciales. Es necesario establecerlas para sistemas finitos, de masa fija, M. Sea $\vec{P}$ la cantidad de movimiento total del sistema

Partiendo de la expresión diferencial, se integra para un sistema finito,

$$\vec{F}_R = \int_M \frac{D}{Dt}(\vec{V}dm) = \frac{D}{Dt}\int_M (\vec{V}dm) = \frac{D\vec{P}}{Dt}$$

FR es la fuerza resultante que actúa sobre el sistema. Esta se compone de fuerzas superficiales Fs, y fuerzas en el volumen o en la masa (la más común es la gravedad). Sea B (vector) la fuerza por unidad de masa. Entonces,

$$\vec{F}_S + \iiint_V \vec{B}\rho dv = \frac{D\vec{P}}{Dt}$$

Este es el principio de Newton para un sistema de tamaño finito. A continuación podemos establecer el principio de cantidad de movimiento para el volumen de control.

Se considera **P** como una propiedad extensiva, y su correspondiente propiedad intensiva es **V**. Por lo tanto:

$$\frac{D\vec{P}}{Dt} = \oiint_{SC} \vec{V}(\rho\vec{V} \bullet d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} \vec{V}(\rho dv)$$

Si se sustituye la derivada del primer miembro por su expresión obtenida anteriormente del análisis diferencial, se obtiene la ecuación de cantidad de movimiento.

$$\vec{F}_s + \iiint_{VC} \vec{B}\rho dv = \oint\!\!\oint_{SC} \vec{V}(\rho\vec{V} \bullet d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_{VC} \vec{V}(\rho dv)$$

Se realizarán numerosas aplicaciones de esta ecuación para comprender su significado y aplicación.