

CINEMÁTICA DE FLUIDOS

En la dinámica de partículas y de cuerpos rígidos, es posible describir el movimiento de c/u de los cuerpos en forma separada y discreta.

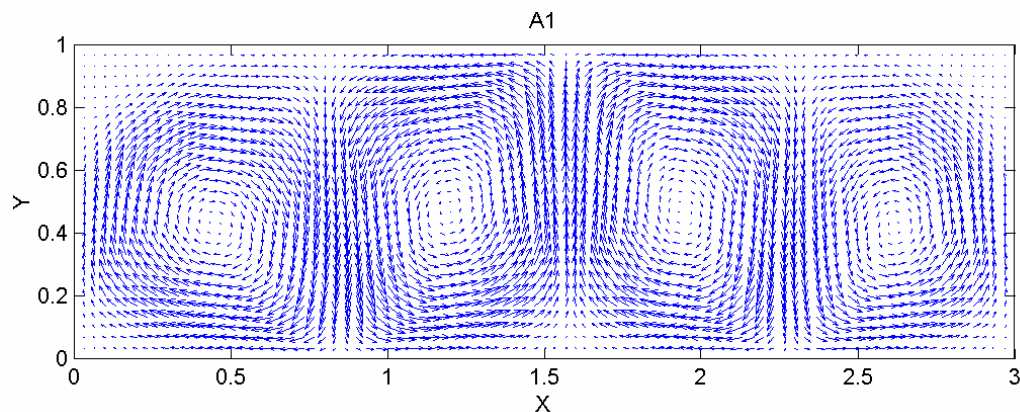
En un sistema deformable (fluido) existe un número infinito de elementos, lo que hace imposible la descripción del movimiento individual de cada uno. Se describe entonces la velocidad de todas las partículas en función de coordenadas espaciales:

$$V_x = u = f(x, y, z, t) \quad V_y = v = g(x, y, z, t) \quad V_z = w = h(x, y, z, t)$$

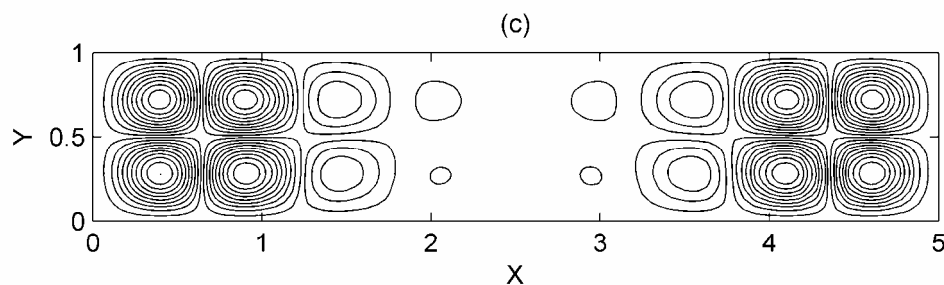
Esta se llama aproximación mediante un campo. En el caso de velocidades es un campo vectorial, pero con variables como temperatura y presión se habla de campos escalares. Si la dependencia temporal se elimina, se trata de un régimen permanente.

Representación gráfica de flujos por vectores de velocidad:

Aquí vemos un flujo de Rayleigh-Bénard, con 4 centros de circulación. Las velocidades se representan como vectores.



Representación por líneas de corriente:



Aquí vemos otro caso de Rayleigh-Bénard, más complejo, en que mostramos líneas de corriente de un flujo no permanente en un instante dado. Los vectores de velocidad son tangentes a las líneas de corriente.

O bien, las líneas de corriente son las envolventes de los vectores de velocidad de las partículas fluidas en un flujo. Cuando el flujo es permanente, las líneas de corriente permanecen fijas en el tiempo. En un flujo no permanente, una configuración de líneas de corriente indicará solamente una representación instantánea del flujo.

Tubo de corriente es un conjunto de líneas de corriente que atraviesan un área infinitesimal. Este concepto es muy útil en el estudio de los fenómenos de flujo. El flujo no cruza las líneas de corriente, por lo cual no existe flujo a través de la superficie lateral de un tubo de corriente.

Dos puntos de vista para describir campos de flujo:

Euler: Considera que por un punto fijo de coordenadas dadas (x_1, y_1, z_1), pasa un conjunto continuo de partículas.

Lagrange: Sigue a la partícula genérica, cuyas coordenadas variarán de manera continua dando en cada instante la posición de esa partícula.

Aceleración de una partícula fluida:

Según el segundo punto de vista, las coordenadas de una partícula, x, y, z , son funciones del tiempo, y podemos evaluar el campo de aceleraciones mediante la regla de derivación de función de función, como sigue:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{V}(x, y, z, t) = \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right) + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \quad (1)$$

Identificamos las derivadas totales con componentes de velocidad:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{V}(x, y, z, t) = \left(V_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + V_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + V_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \quad (2)$$

Escalarmente:

$$a_x = \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} \right)$$

$$a_y = \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} \right)$$

$$a_z = \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} \right)$$

Las aceleraciones por lo tanto, están formadas por una parte “convectiva”, o “de transporte”, dada por las variaciones de velocidad de punto a punto en un campo de flujo. Resulta fácil retener la forma de los términos convectivos: para cada componente se deriva la misma velocidad. Como factor multiplicador de las derivadas se suceden las diferentes componentes de velocidad, y éstas corresponden a la coordenada respecto a la cual se deriva.

La segunda parte corresponde a la variación temporal de la velocidad, o aceleración local.

La derivada realizada aquí recibe diversos nombres, tales como “derivada total”, derivada sustancial, o derivada particular, los cuales sugieren el enfoque empleado en obtenerla.

Debe notarse que en la aceleración radica la no linealidad de los fenómenos de flujo. Debido a esta no linealidad, en flujos dependientes del tiempo, aparecen los regímenes caóticos y turbulentos.

PRINCIPIOS GENERALES PARA LOS MEDIOS CONTINUOS

Existen 4 principios básicos y fundamentales:

Conservación de la materia (Continuidad)
Segunda ley de Newton (Cantidad de Movimiento)
Conservación de Energía (Primer principio de la TD)
Segundo Principio de la Termodinámica

Aparte de los principios generales existen otros secundarios, que se aplican a algunos fluidos particulares, o a algunos fenómenos particulares. Ejemplo la ley de Newton (o de Stokes) de viscosidad. La ley de Hooke para sólidos elásticos. La ley de Fourier para conducción de calor en sólidos.

Sistemas y volúmenes de control

Es posible usar masas o volúmenes para plantear los principios básicos:

En el primer caso, aplicamos los principios a una cantidad dada de materia llamada sistema (S). Este puede cambiar de forma, posición, etc., pero debe contener siempre la misma cantidad de materia.

En el segundo método, se toma un volumen fijo y determinado del espacio, llamado volumen de control (VC). Su superficie y forma son fijas, pero hay flujos a través de sus límites. Este concepto se aplica ventajosamente en Mecánica de Fluidos.

Relación entre S y VC

Propiedades extensivas: Dependen de la cantidad de sustancia presente: Ej.: peso, volumen, cantidad de movimiento, energía interna.

Propiedades intensivas: No dependen: P, T, y las propiedades anteriores en su forma “específica”, es decir, referidas a la unidad de masa (densidad, calor específico, etc.).

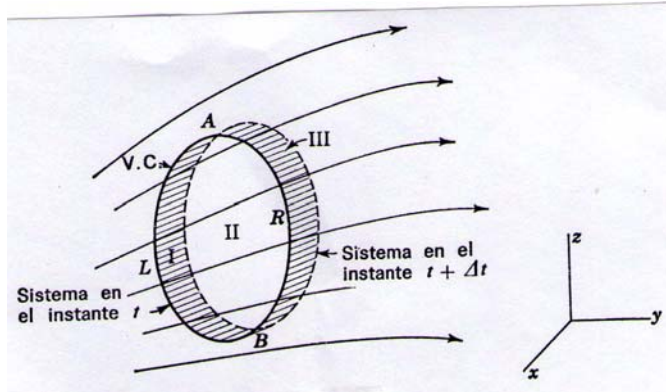
Sea un campo arbitrario de velocidades $V(v,y,z,t)$ visto desde un sistema de referencia xyz.

Se considera un sistema finito de fluido en dos instantes t y $t+\Delta t$.

Estudiaremos una propiedad extensiva arbitraria N , que tiene una distribución por unidad de masa η (intensiva), de modo que:

$$N = \iiint \eta \rho dv \quad (3)$$

En una cierta región existe un campo de flujo arbitrario $V(x,y,z,t)$ visto desde un sistema de coordenadas fijo, y visualizado por un sistema de líneas de corriente en un instante t .



Consideraremos un sistema en el instante t , y un VC cuyo volumen y superficie de control SC, coinciden con el sistema en el instante t .

Ahora, visualizamos también el sistema en un instante $t + \Delta t$, posterior.

La región II pertenece al sistema en los dos instantes.

Calculamos la tasa de variación de N en el tiempo en el sistema, mediante la formación de la derivada como cociente de incrementos y el proceso de paso al límite:

$$\left(\frac{dN}{dT} \right)_{SIST} = \frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\iiint_{III} \eta \rho dv + \iiint_{II} \eta \rho dv \right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_I \eta \rho dv + \iiint_{II} \eta \rho dv \right)_t}{\Delta t} \right\} \quad (4)$$

Una reordenación favorable es:

$$\frac{DN}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\iiint_{II} \eta \rho dv \right)_{t+\Delta t} - \left(\iiint_{II} \eta \rho dv \right)_t}{\Delta t} \right\} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\iiint_{III} \eta \rho dv \right)_{t+\Delta t}}{\Delta t} \right\} - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\left(\iiint_I \eta \rho dv \right)_t}{\Delta t} \right\} \quad (5)$$

De los tres límites que aparecen en la última ecuación, en el primero, cuando el incremento temporal tiende a cero, el volumen II tiende al volumen seleccionado como volumen de control. En el límite, ese término vale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta \rho dv$$

Es decir, representa la tasa de variación con el tiempo, de la cantidad de N en el interior del volumen de control.

El segundo límite en la ecuación (5) representa la cantidad de la propiedad N que atraviesa la parte ARB de la superficie de control (Figura). Al tender el intervalo de tiempo a cero, representa la cantidad de la propiedad N que sale del VC por unidad de tiempo.

Análogamente, el tercer límite representa la cantidad de N que pasa al interior del volumen de control, a través de la superficie ALB. Por lo tanto, los dos últimos términos nos dan el flujo neto instantáneo de la propiedad N que atraviesa la superficie del volumen de control (o superficie de control, SC). Si se evalúan dimensionalmente los términos finales de la ecuación (5) se ve que sus dimensiones corresponden a “unidades de N” por unidad de tiempo.

Otra forma de expresar el mismo flujo es por medio de una integral de superficie. Sea $d\vec{A}$ el elemento de área de la superficie de control, representado como un vector que apunta hacia afuera para una superficie cerrada, entonces:

$\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ representa el caudal másico (kg/s) a través de dA, y $\eta \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}$ representa el caudal de la propiedad extensiva correspondiente a η , y se expresa en “unidades de N” por unidad de tiempo.

Por lo tanto, el flujo neto de N por unidad de tiempo a través de la superficie de control se expresa también como:

$$\oiint_{SC} \eta (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A})$$

Por lo tanto, la relación entre el sistema y el volumen de control con respecto a la propiedad N, se puede expresar como:

$$\frac{DN}{Dt} = \oiint_{SC} \eta (\rho \vec{V} \cdot d\vec{A}) + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \eta (\rho dv) \quad (6)$$

El término izquierdo es la tasa de variación con el tiempo de la cantidad de N en el sistema, evaluada en el instante t. El primer término del lado derecho es el flujo de N por unidad de tiempo a través de la superficie de control en el instante t.

El segundo término del lado derecho es la tasa de variación de la cantidad de N en el interior del VC, que tiene la forma del sistema en el instante t.

El desarrollo anterior nos permite centrar todos los análisis posteriores en volúmenes de control. Ese es el enfoque que se utilizará en lo sucesivo.

Hemos considerado flujos tridimensionales aunque en determinadas condiciones, son útiles las hipótesis de flujo unidimensional (en que todas las propiedades y características se pueden expresar en función de una sola coordenada espacial. En un flujo bidimensional las variables independientes son dos.

Aplicaciones:

Ecuación de Continuidad o Conservación de la Masa.

$$\text{Sea } N = M, \quad \eta = 1, \quad M = \iiint \rho dv$$

La masa de un sistema genérico es constante, por lo cual, en un instante cualquiera:

$$\frac{DM}{Dt} = 0 \Rightarrow \oiint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{VC} \rho dv \quad (7)$$

Esta es la ecuación de conservación de la masa. Expresa que en un volumen de control, el flujo de masa instantáneo neto por unidad de tiempo, que cruza la superficie de control, es igual a la tasa de variación (disminución) respecto al tiempo, de la masa contenida en el volumen de control. Los términos de la ecuación (7) se expresan en unidades de masa por unidad de tiempo.

Si un flujo es permanente respecto a una referencia fija, y todas las propiedades incluida la densidad permanecen invariantes en el tiempo, de esta manera la integral que contiene derivada temporal se anula. Por lo tanto, para flujo permanente:

$$\oiint_{SC} \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Si se considera un flujo incompresible, la densidad es constante en toda la región y en el tiempo, aun cuando el campo de velocidades no sea permanente. Luego, se anula el último término de la ecuación (7) y se puede sacar la densidad del primer término, quedando la ecuación de conservación de la masa reducida a una de conservación de volumen:

$$\oiint_{SC} \vec{V} \cdot d\vec{A} = 0$$

Las integrales indicadas en estas ecuaciones pocas veces deben ejecutarse realmente. Existe una gran cantidad de casos sencillos importantes, que se pueden resolver con sencillez y aportan un gran valor conceptual.