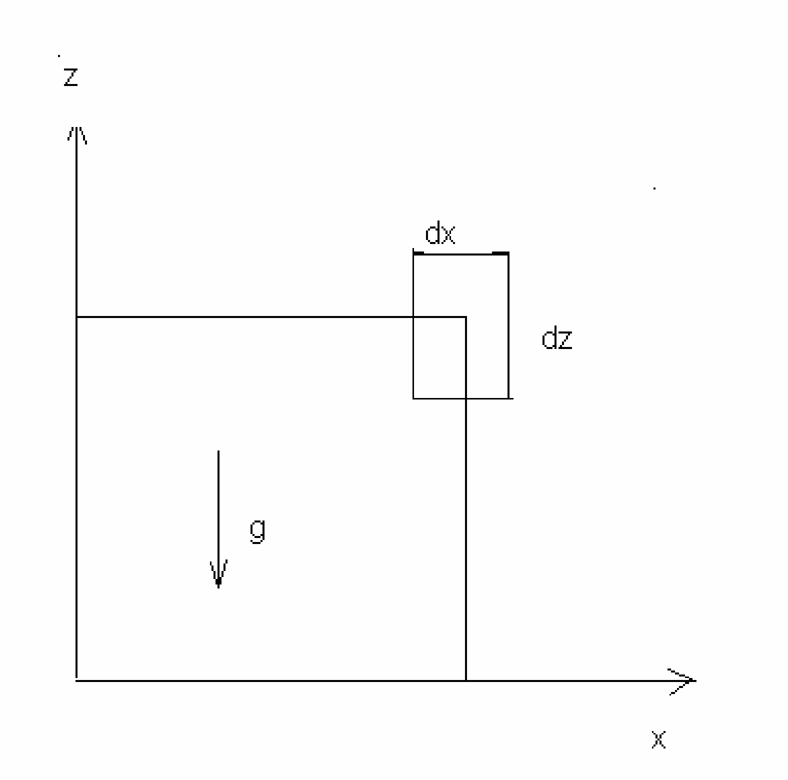
Estática de Fluidos

Definición:

En el caso de fluidos en reposo, no hay movimiento relativo entre elementos de fluido, por lo tanto no hay gradientes ni esfuerzos de corte, cualquiera que sea la viscosidad el fluido.
La viscosidad no interviene en el caso estático.

Ecuación fundamental de la estática:

Se considera el equilibrio estático de un elemento diferencial de fluido. El eje vertical (z) tiene sentido positivo hacia arriba Se escoge un elemento bidimensional por conveniencia:



Sobre el elemento fluido mostrado, actúan presiones p_A, p_B, p_C, p_D, sobre las caras vertical izquierda, horizontal inferior, vertical derecha y horizontal superior respectivamente. Todas las presiones apuntan al interior del elemento. Estas presiones generan las correspondientes fuerzas:

Primera ley de Newton

$$\sum F_x = p_A \Delta z - p_C \Delta z = 0 \Rightarrow p_A - p_C = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_z = p_B \Delta x - p_D \Delta x - \Delta W = 0 \Rightarrow p_B - p_D - \gamma \Delta z = 0 \qquad (2)$$

Expresando las presiones en las caras en función de la presión en el centro del elemento mediante series de Taylor, encontramos expresiones como:

$$p_A = p - \frac{\partial p}{\partial x}(\Delta x/2) \qquad p_B = p - \frac{\partial p}{\partial z}(\Delta z/2)$$

$$p_C = p - \frac{\partial p}{\partial x}(\Delta x/2) \qquad p_D = p - \frac{\partial p}{\partial z}(\Delta z/2)$$

Usando estas expresiones en (1) y (2) se llega a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma = -\rho g$$

No hay variación de presión con las coordenadas horizontales, pero si con la coordenada vertical. Poniendo la última expresión en derivadas totales,

$$\frac{-dp}{\rho g} = dz \Rightarrow z_2 - z_1 = \int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\rho g}$$

La resolución de la integral requiere el uso de una ecuación de estado. Pero en ocasiones se considera un fluido de densidad constante (lo cual es más válido para líquidos en distancias verticales grandes y para gases en pequeñas).

Para densidad constante:

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) = \rho g(z_2 - z_1) = \rho g h \qquad (3)$$

Esto muestra que las diferencias de presión pueden expresarse como alturas de un fluido de densidad especificada (mm de Hg, mm de agua, etc.)

La presión atmosférica estándar en el nivel del mar es de 14,7 psia, 101,3 kN/m^2 o 760 mm de Hg.

La ecuación (3) también se puede escribir:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = Cte$$

Esta ecuación define una cantidad invariante para todos los puntos de un líquido. Esta ecuación se deja para comparar posteriormente con el caso de fluido en movimiento, en que se agregan términos de velocidad.

Medición de presiones

Este punto se trató en clase, por lo cual no es necesario repetirlo en este apunte. Lo esencial es que mediante manómetros con alturas de líquidos de densidad fija y conocida, se pueden obtener presiones absolutas, o presiones diferenciales.

Los manómetros tipo Bourdon, en cambio (gages, gauges) no se basan en la altura de una columna líquida sino en la dilatación y deformación de un tubo que contiene el fluido cuya presión se desea medir en su interior, mientras por el exterior hay aire atmosférico. Detectan, por lo tanto, presión relativa.

Empuje:

La fuerza de empuje sobre cuerpos sumergidos se debe a la diferencia entre las presiones sobre puntos del cuerpo ubicados a menor y mayor profundidad. Estas últimas presiones son mayores, con lo que resulta una fuerza ascendente neta igual al peso del fluido desplazado.

Fuerzas sobre superficies sumergidas

Superficies planas

La parte más interesante de la estática de fluidos está en la determinación de Fuerzas sobre superficies sumergidas.

El cálculo de la magnitud, dirección y ubicación de las fuerzas totales en superficies sumergidas en líquidos es esencial en el diseño de represas, estanques, barcos, compuertas, etc.

Para una superficie plana horizontal el cálculo de esas fuerzas es simple porque la presión no varía sobre el área. Esto no ocurre en superficies inclinadas o verticales, ya que la presión de líquidos de densidad constante varía linealmente con la profundidad.

Consideremos el caso general de un área plana sumergida, A, ubicada en un plano inclinado, LL. Estudiaremos solo las fuerzas que actúan sobre la cara superior.

C: centroide, Ubicado a profundidad h_c y a distancia l_c de la intersección OO' del plano LL con la superficie líquida. La ubicación de centroides de áreas y volúmenes importantes está tabulada junto con áreas y momentos de áreas (ver más adelante).

Consideramos un elemento de área dA, ubicado en la superficie a altura constante (horizontal) de modo que la presión local sobre él es uniforme. Este elemento se muestra frontalmente en la parte inferior de la figura, que corresponde vista BB. La fuerza sobre dA es dF:

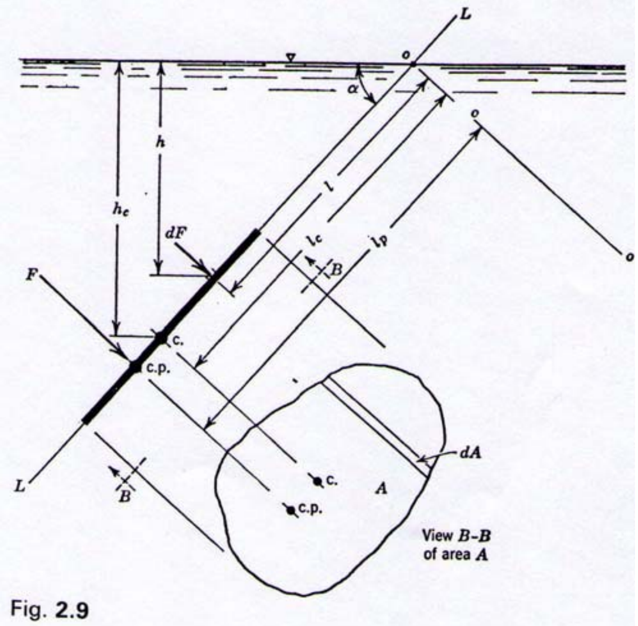


Fig. 2.9

$dF = pdA = \gamma hdA$

Como $h = lsen\alpha$

$dF = \gamma ldAsen\alpha,$ $\quad F = \gamma sen\alpha \int_A ldA = \gamma sen\alpha\, l_c A$

$\int_A ldA$ es el momento de primer orden del área A alrededor de la línea O-O.

Pero, $h_c = l_c sen\alpha$

$F = \gamma\, h_c A$

La fuerza resultante sobre un lado de un área plana sumergida puede calcularse multiplicando el área A por la presión en su centroide.

La dirección de la fuerza es normal a la superficie, ya que no puede haber esfuerzos de corte en esta situación.

La línea de acción de la fuerza queda por determinar.

La distancia lp entre la línea de acción y el eje O-O, puede encontrarse dividiendo el momento de la fuerza (alrededor de este eje) por la magnitud de la fuerza.

Veamos el momento dM de la fuerza dF respecto al eje O-O. Este vale ldF

$$dM = ldF = l\gamma l dA sen\alpha$$

El momento total:

$$M = \gamma sen\alpha \int_A l^2 dA$$

La integral representa el segundo momento del área A respecto a la línea O-O. (I_{O-O})

$$M = \gamma I_{O-O} sen\alpha$$

Como el brazo de momento es el momento dividido por la fuerza,

$$l_p = M / F = \frac{I_{O-O}}{l_c A}$$

La ecuación anterior puede hacerse más utilizable poniéndola en términos del segundo momento. Ic, alrededor de un eje ubicado en el área, paralelo a O-O, y que pasa por el centroide del área. La ventaja es que los valores de Ic están tabulados:

$$I_{O-O} = I_c + l_c^2 A$$

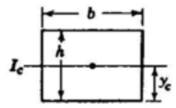
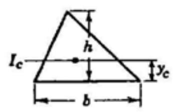
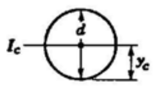
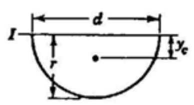
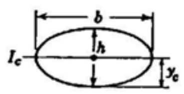
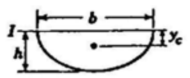
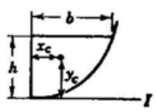
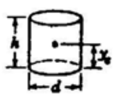
(Teorema de Steiner o de ejes paralelos)

$$l_p = \frac{I_c + l_c^2 A}{l_c A} = \frac{I_c}{l_c A} + l_c \Rightarrow l_p = l_c + \frac{I_c}{l_c A}$$

Esto permite calcular directamente la distancia entre el centroide y el centro de presión. Este está más abajo que el centroide ya que el segundo término en la última ecuación es una cantidad positiva.

En la página siguiente se presenta una Tabla conteniendo, para una serie de Superficies de importancia, las magnitudes importantes: Área, momento del área respecto al centroide y ubicación vertical del centroide.

Properties of Areas and Volumes

	Sketch	Area or Volume	Location of Centroid	I or I_c
Rectangle		bh	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{bh^3}{12}$
Triangle		$\frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{h}{3}$	$I_c = \frac{bh^3}{36}$
Circle		$\frac{\pi d^2}{4}$	$y_c = \frac{d}{2}$	$I_c = \frac{\pi d^4}{64}$
Semicircle		$\frac{\pi d^2}{8}$	$y_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I = \frac{\pi d^4}{128}$
Ellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$	$I_c = \frac{\pi bh^3}{64}$
Semiellipse		$\frac{\pi bh}{4}$	$y_c = \frac{4h}{3\pi}$	$I = \frac{\pi bh^3}{18}$
Parabola		$\frac{2}{3}bh$	$y_c = \frac{3h}{5}$ $x_c = \frac{3b}{8}$	$I = \frac{2bh^3}{7}$
Cylinder		$\frac{\pi d^2 h}{4}$	$y_c = \frac{h}{2}$	