Tarea 1

Capítulo I

1. Sea $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X. Notamos como $a(\mathcal{G})$ y $\sigma(\mathcal{G})$ el álgebra y σ-álgebra generados por $\mathcal{G}$. Una partición $\{P_j\}_{j\in J}$ de X es una familia de subconjuntos de X 2 a 2 disjuntos que cumplen $\bigcup_{j\in J} P_j = X$.

    a) Dada $P = \{P_j\}_{j\in J}$ una partición de X caracterice:

    1) $a(P)$ si J es finito.
    2) $a(P)$ si J es infinito.
    3) $\sigma(P)$ si J es finito o numerable.
    4) $\sigma(P)$ si J es infinito no numerable.

    b) Pruebe que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X es un álgebra de Boole generada por una cantidad finita de elementos si y solo si está generado por una partición $P = \{P_j\}_{j\in J}$ con J finito.

    c) Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre un conjunto numerable. Pruebe que existe una partición P de X tal que $\mathcal{A} = \sigma(P)$. ¿Qué puede decir de la cardinalidad de la partición P?.

    d) Demuestre que no existe ninguna σ-álgebra con una cantidad numerable de elementos.

2. Sea $\mathcal{G}$ una familia de subconjuntos de un conjunto X que contiene a X y que es cerrada para la intersección finita de elementos. Una r-familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos de X es una familia que es cerrada para la unión finita de conjuntos disjuntos 2 a 2 y tal que si A y B están en $\mathcal{R}$ y $A \subseteq B$ entonces $B\backslash A$ está en $\mathcal{R}$.

    Muestre que la intersección arbitraria de r-familias es una r-familia y sea $r(\mathcal{G})$ la r-familia generado por $\mathcal{G}$. Pruebe que $r(\mathcal{G}) = a(\mathcal{G})$.

    HINT: Pruebe que las siguientes familias son r-familias:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \{B \in r(\mathcal{G}) / \forall A \in \mathcal{G},\ A \cap B \in r(\mathcal{G})\} \\
\mathcal{R}_2 &= \{B \in r(\mathcal{G}) / \forall A \in r(\mathcal{G}),\ A \cap B \in r(\mathcal{G})\}
\end{aligned}
$$

3. Sean $\mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ familias no vacías de subconjuntos de X cerradas para intersección finita. Sean $\mathcal{A}_1 = \sigma(\mathcal{G}_1)$, $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{G}_2)$ y $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2)$. Sea μ una

medida tal que $\mu(X) = 1$ en $(X, \mathcal{A})$. Pruebe que si para cualquier $A_1 \in \mathcal{G}_1$ y $A_2 \in \mathcal{G}_2$ se tiene que $\mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2)$ entonces se tiene lo mismo para cualquier $A_1 \in \mathcal{A}_1$ y $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

HINT: Use el problema anterior y el Teorema de la Clase Monótona y considere las siguientes familias:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1 &= \{A \in \mathcal{A} / \forall A_2 \in \mathcal{G}_2,\ \mu(A \cap A_2) = \mu(A) \cdot \mu(A_2)\} \\
\mathcal{M}_2 &= \{A \in \mathcal{A} / \forall A_1 \in \mathcal{A}_1,\ \mu(A \cap A_1) = \mu(A) \cdot \mu(A_1)\}
\end{aligned}$$

4. Extienda el resultado anterior a una familia para una cantidad finita de familias.

5. Considere el conjunto:

$$l^\infty = \{x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} / \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Se define $T : l^\infty \to l^\infty$ como $(Tx)_0 = x_0$ y $(Tx)_n = x_n - x_{n-1}$ si $n > 0$.

a) Pruebe que la ecuación $T(x) = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene solución en l^∞

b) Sea $F = T(l^\infty)$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal f de l^∞ tal que $f(x) = 0$ para todo x en F con $f(\{1\}_{n\in\mathbb{N}}) = 1$ y $\sup\{|f(x)| / \|x\|_\infty \leq 1\} < \infty$.

Pruebe que f es un operador positivo en que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \geq 0$ si y solo si $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$.

c) Sea $S : l^\infty \to l^\infty$ definido por $(Sx)_n = x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $f = f \circ S$ en l^∞.

d) Muestre que $\liminf_{n\to\infty} x_n \geq 0$ implica que $f(x) \geq 0$. Concluya que $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq f(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$ en l^∞.

e) Se define $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ como $\mu(A) = f(\mathbb{1}_A)$. Muestre que μ es finitamente aditiva pero no σ-aditiva.

COMENTARIO: El funcional f se llama *Límite de Banach* y no tiene expresión explícita. De manera similar es imposible dar un ejemplo explícito de una medida aditiva que no es σ-aditiva sobre una σ-álgebra.

6. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y f una función no negativa en X. Para $t \geq 0$ se define:

$$F(t) = \mu\{x \in X / f(x) > t\},\ G(t) = \mu\{x \in X / f(x) \geq t\}.$$

a) Si $f(X) \subseteq \mathbb{N}$ es integrable pruebe que:

$$\int\limits_X f(x)\, d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n).$$

HINT: Defina $\mu_n = \mu\{x \in X / f(x) = n\}$ y muestre que $\int\limits_X f(x)\, d\mu(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot \mu_n$.

b) Si f^α es integrable para $\alpha > 0$ pruebe que:

$$\int\limits_X f(x)^\alpha\, d\mu(x) = \alpha \cdot \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} F(t)\, dt = \alpha \cdot \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} G(t)\, dt.$$

HINT: Use el Teorema de Convergencia Monótona para probar que se cumple para $\alpha = 1$ considerando las funciones $f_n = \frac{[2^n f(x)]}{2^n}$ con $[x]$ el mayor entero que es menor que x.