FACULTAD DE CS. FÍSICAS Y MATEMÁTICAS — UNIVERSIDAD DE CHILE

MA680 Análisis. Semestre 2009-01
Profesor: Carlos Conca Rosende
Auxiliar: Thomas Capelle

Guía II: Espacios Topológicos

Problemas.-

1. Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ un espacio topológico, y sean $A, B \subseteq \mathbb{X}$. Pruebe (o recuerde) las demostraciones de las siguientes propiedades

   a) $int(\mathbb{X}) = \mathbb{X}, \quad int(\emptyset) = \emptyset$
   b) $int(int(A)) = int(A)$
   c) $A \subseteq B \Rightarrow int(A) \subseteq int(B)$
   d) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

2. Utilice la identidad $int(A) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A})$ para probar que

$$\mathcal{C}_{\mathbb{X}} \overline{A} = int(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A)$$

   Solución: Probemos primero la identidad:

   $(\subset)$ $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} \subset \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A} \Leftrightarrow A \supset \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A}) \Leftrightarrow int(A) \supset int(\mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A})) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A})$ pues es un conjunto abierto. Con esto tenemos $\mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A}) \subset int(A)$

   $(\supset)$ $int(A) \subset A \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(int(A)) \supset \mathcal{C}_{\mathbb{X}} A \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(int(A)) \supset \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A} \Leftrightarrow int(A) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A})$ donde la penultima inclusión es por ser un conjunto cerrado.

   Ahora tenemos que:

$$int(A) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A})$$

   Llamemos $B = \mathcal{C}_{\mathbb{X}} A$ y apliquemosle la identidad:

$$int(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A) = int(B) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} B}) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A)}) = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(\overline{A})$$

3. Pruebe (o recuerde) las demostraciones de las siguientes propiedades

   a) $\overline{\emptyset} = \emptyset, \quad \overline{\mathbb{X}} = \mathbb{X}$
   b) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
   c) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
   d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

4. Sean $\mathcal{O}_1$ y $\mathcal{O}_2$ topologías sobre $\mathbb{X}$. Demuestre que son equivalentes

   a) $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$
   b) $\forall x \in \mathbb{X}$, $\forall\, \mathcal{U}_x$ vecindad de x en $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_1)$, $\mathcal{U}_x$ es también vecindad de x en $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_2)$
   c) Todo cerrado en $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_1)$ es cerrado $(\mathbb{X}, \mathcal{O}_2)$

5. Encuentre todas las posibles topologías sobre el conjunto $\mathbb{X} = \{a, b\}$ y sobre el conjunto $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$

6. Sea $\mathbb{X}$ un conjunto. Para $A \subseteq \mathbb{X}$ se define

$$\mathcal{O}_A = \{E \in \mathcal{P}(\mathbb{X}) \text{ tal que } A \subseteq E \vee E = \emptyset\}$$

a) Demuestre que $\mathcal{O}_A$ define una topología sobre $\mathbb{X}$

b) Demuestre que $\mathcal{O}_A$ es más fina que $\mathcal{O}_B$ si $A \subseteq B$

c) Demuestre que $\mathcal{O}_A$ es más fina estrictamente que $\mathcal{O}_B$ ssi $A \subsetneq B$

d) Sea $\mathcal{O}$ una topología sobre $\mathbb{X}$ tal que

$$\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}_{A_i} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Demuestre que

$$\mathcal{O} \supseteq \mathcal{O}_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$$

e) Sea $\mathcal{O}$ una topología sobre $\mathbb{X}$ tal que

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{A_i} \quad \forall i \in I.$$

Demostrar que

$$\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

7. Sea $\mathbb{X}$ un conjunto y m un cardinal infinito. Demuestre que $\emptyset$ y los subconjuntos de A de $\mathbb{X}$ tales que

$$\#(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A) \leq m$$

forman los abiertos de una topología. Encuentre o caracterice los cerrados.

8. Demuestre que $\mathcal{U}$ es abierto de $\mathbb{X}$ ssi

$$\forall A \in \mathbb{X}, \mathcal{U} \cap A = \emptyset \Rightarrow \mathcal{U} \cap \overline{A} = \emptyset$$

9. Demostrar que en todo espacio topológico $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$, si $A, B \subseteq \mathbb{X}$, entonces se tiene

a) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \cap int(B) = \emptyset$

b) $A \cup B = \mathbb{X} \Rightarrow \overline{A} \cap int(B) = \mathbb{X}$

Solución:

a) Por Contradicción: Sea $A \cap B = \emptyset$ y supongamos que existe $x \in \overline{A} \cap int(B)$ (pues es distinto de vacío), entonces $x \in \overline{A}$ y $x \in int(B)$. Como $x \in int(B)$ y este conjutno es abierto existe una vecindad de x que llamaremos V_x tal que: $V_x \subset int(B) \subset B$. Además $x \in \overline{A}$, entonces por definición de adherencia $A \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$, pues $V_x \subset B$. Lo que es una contradicción con el supuesto de que $A \cap B = \emptyset$

b) Propuesto. Hint: Use (a) y el problema 2.

10. Demuestre que si $\mathcal{B}$ es una base para un espacio topológico $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$, entonces $\mathcal{B}$ contiene una base de vecindades para cualquier x de E

11. Sea $\mathcal{U}$ un abierto de un espacio topológico $\mathbb{X}$. Pruebe que

$$\mathcal{U} \cup int(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} \mathcal{U}) \text{ es denso en } \mathbb{X}$$

12. Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ espacio topológico. Para $A \subseteq \mathbb{X}$ se define

$$\alpha(A) = int(\overline{A}) \text{ y } \beta(A) = \overline{int(A)}$$

a) Pruebe que si $A \subseteq B$ entonces $\alpha(A) \subseteq \alpha(B)$ y $\beta(A) \subseteq \beta(B)$

b) Pruebe que si A es abierto entonces $A \subseteq \alpha(A)$

c) Pruebe que si A es cerrado entonces $\beta(A) \subseteq A$

d) Pruebe que $\alpha(\alpha(A)) = \alpha(A)$ y $\beta(\beta(A)) = \beta(A)$

e) Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ de un conjunto A tal que

$$A, int(A), \overline{A}, \alpha(A), \beta(A), \alpha(int(A)), \beta(\overline{A})$$

sean todos distintos y tal que sólo las inclusiones

$$int(A) \subseteq A \subseteq \overline{A}$$

$$\alpha(int(A)) \subseteq \alpha(A)$$
$$\beta(A) \subseteq \beta(\overline{A})$$
$$int(A) \subseteq \alpha(int(A)) \subseteq \beta(A) \subseteq \overline{A}$$
$$int(A) \subseteq \alpha(A) \subseteq \beta(\overline{A}) \subseteq \overline{A}$$

13. Sea $\mathbb{R}$ con la topología $\mathcal{O} = \{\mathbb{R}, \emptyset, (-\infty, x)\ \forall x \text{ en } \mathbb{R}\}$. Encuentre los puntos de acumulación de $\{0\}$, y pruebe que no es cerrado.

14. Demostrar que en un espacio separable, toda familia de conjuntos abiertos no vacíos $\{U_i\}_{i\in I}$ tal que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ es a lo más numerable.
Solución: Consideremos el espacio topológico $(X, \mathcal{O})$ separable. Sea $D = \{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ el conjunto numerable denso en X. Como los U_i son abiertos, para cada $i \in I$ existe un elemento del conjunto D que está en U_i (densidad, si no está claro verifíquelo). Elijamos un elemento para cada U_i (Como los U_i son disjuntos, la signación de los d_n es única). Claramente se establece una biyección entre un subconjunto de D y $\{U_i\}_{i\in I}$. Por lo tanto: $\#(\{U_i\}_{i\in I}) \leq \#(D)$.

15. Sea $(\mathbb{X}, \mathcal{O})$ espacio topológico y $A \subseteq \mathbb{X}$. Recuerde que el borde (o frontera) de A se definió como

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A} = \overline{A} \backslash int(A)$$

demostrar que

a) A cerrado $\Leftrightarrow \partial A \subseteq A$

b) A abierto $\Leftrightarrow \partial A \cap A = \emptyset$

c) $A = \partial A \Rightarrow int(A) = \emptyset \Rightarrow \partial A = \overline{A}$

d) Demostrar que si A es abierto o cerrado, entonces $\partial(\partial A) = \partial A$. Dar un ejemplo que muestre que se puede tener $\partial(\partial A) \neq \partial A)$

Solución:

b)($\Rightarrow$) Si A es abierto, entonces $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A$ es cerrado, por lo tanto $\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A = \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A} = \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(int(A))$. Con esto

$$\partial A \cap A = \overline{A} \cap \overline{\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A} \cap A = A \cap \mathcal{C}_{\mathbb{X}} A = \emptyset$$

($\Leftarrow$) Si $\partial A \cap A = \emptyset$, entonces $\overline{A} \cap \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(int(A)) \cap A = \emptyset \Rightarrow A \cap \mathcal{C}_{\mathbb{X}}(int(A)) = \emptyset \Rightarrow A \subset int(A)$

16. Pruebe que en un espacio topológico separado los singuletes $\{x\}$ son cerrados. Pruebe que la recíproca es falsa, para ello considere el siguiente espacio topológico:

$$(X, \mathcal{O}),\ \text{donde } \mathcal{O} = \{A \in P(X)\ :\ \#(\mathcal{C}_{\mathbb{X}} A) < \infty\} \text{ y } \#X \geq \#\mathbb{N}$$

Pruebe que si define dos vecindades de puntos distintos, es imposible que estas sean disjuntas.