Estructuras Importantes y nociones básicas de medida.

I. $\mu : \mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ se dice medida si:
   - $\mu(\emptyset) = 0$
   - μ es σ-aditiva, esto es $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$, con A_n disjuntos.

II. $S \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una semi-algebra si:
   - $X, \emptyset \in S$
   - $A, B \in S \Rightarrow A \cap B \in S$
   - $\forall A, B \in S \;\; \exists (C_i)_{i=1}^n \subset S$ disjuntos tal que: $A \setminus B = \bigcup C_i$

III. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es un álgebra si:
   - $X \in \mathcal{A}$
   - $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

IV. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que es una σ-álgebra si:
   - $\mathcal{T}$ es un álgebra
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}$

V. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice clase monónotona si:
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}, \quad A_n \nearrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$
   - $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}, \quad A_n \searrow A \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

   -Si $\mathcal{M}$ es clase mónotona y álgebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{M}$ es σ -álgebra.
   -$\mathcal{A}$ es álgebra $\Rightarrow \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$
   -Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, entonces: $\sigma(A) \subset \mathcal{M}$

VI. $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice π-sistema si:
   - $A, B \in \mathcal{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{P}$

VII. $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ se dice λ-sistema si:
   - $X \in \mathcal{T}$
   - $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$
   - Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ son disjuntos $\Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}$

$\mathcal{A}(S) = \{A \in \mathcal{P}(X) / \; \exists B_1, ..., B_n \in S$, disjuntos y tales que $\; A = \bigcup B_i\}$

Continuidad de la Medida.

I. $A \in S$ y $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S$, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$:
   - A_n disjuntos, $\bigcup A_n \subset A \Rightarrow \sum \mu(A_n) \leq \mu(A)$, ($\bigcup A_n$ no está en S necesariamente)
   - $A \subset \bigcup A_n \Rightarrow \mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$

II. $\mathcal{A}$ álgebra, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$:
   - $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \nearrow A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A_n) \nearrow \mu(A)$
   - $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \searrow A \in \mathcal{A}$ y $\exists n_0$, $\mu(A_{n_0}) < \infty, \Rightarrow \mu(A_n) \searrow \mu(A)$

Extensión de la Medida. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$:

1. μ^* es medida exterior si:
   - $\mu^*(\emptyset) = 0$
   - μ^* es monótona
   - μ^* es σ-subaditiva
2. A es μ^* medible si: $\forall E \subset X$
   $\mu^*(E) = \mu^*(E \setminus A) + \mu^*(E \cap A)$ (basta verificar $\geq$)
3. $\eta = \{A \; : \; A$ es μ^* medible $\}$ es σ-algebra, y $\mu^*|_\eta$ es medida.
4. **(Teorema de Caratheodory)** S semi-algebra, $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida y $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ definida por: $\mu^*(A) = \text{ínf}_{R(A)} \sum \mu(A_i)$
   - μ^* es medida exterior
   - μ^* es extensión de μ
   - $\eta = \{A \; : \; A$ es μ^* medible $\} \supset \sigma(S)$

   Unicidad de la extensión:
   - $\mu^* : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida $\Rightarrow \exists!$ extensión $\mu : \mathcal{A}(S) \to \overline{\mathbb{R}}_+$
   - $\mu^* : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida σ-finita $\Rightarrow \exists!$ extensión $\mu : \sigma(S) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ (Que es la de Caratheodory)

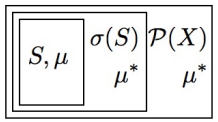
Completitud de un espacio de Medida. $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espacio de medida:

Se dice completo si contiene a todos los despreciables, $\exists D \in \mathcal{T}$ tq $N \subset D$ y $\mu(D) = 0$

1. $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida exterior y η la σ-álgebra de los μ^* medibles.

   Entonces $(X, \mathcal{T}, \mu)$ es completo.
2. Definiendo:
   - $\overline{\mathcal{T}} = \{A \cup N : \; A \in \mathcal{T}, N$ despreciable $\}$
   - $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$

   $(X, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ es la más peq. completación de $(X, \mathcal{T}, \mu)$



3. $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida σ-finita*, (X, η, μ_c) ext. de Caratheodory. *$(X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$ con $\mu(B_i) < \infty)$ $\eta \supset \sigma(S)$; $\mu_c|_{\sigma(S)}$ es la única extensión a $(X, \sigma(S))$
   Y se tiene que (X, η, μ_c) es la completación de $(X, \sigma(S), \mu_c|_{\sigma(S)})$
4. $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medida, μ^* medida de la extensión de Caratheodory $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $\exists B \in \sigma(S)$; $A \subset B$: $\mu^*(A) = \mu^*(B)$

Medida de Lebesgue. $\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R} : \; A$ es μ^* medible $\}$ es la σ-álgebra de Lebesgue.
$(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu)$ es la completación de $(\mathbb{R}, \mathcal{B} = \sigma(S), \mu)$

Regularidad. Aproximación de conjuntos de $\mathcal{L}$ por abiertos y cerrados.
$(X, \mathcal{T}, \mu)$ se dice regular si:

- $\mathcal{T} \subset \overline{\sigma(S)}$ (Completación con respecto a μ)
- $\forall K$ compacto, $\mu(K) < \infty$
- $\forall A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) = \inf\limits_{\theta\in\Theta, \; \theta\supset A} \mu(\theta)$
- $\theta \in \Theta$, $\mu(\theta) = \sup\limits_{K\subset\theta, \; K\in\mathcal{K}} \mu(K)$

Si $(X, \mathcal{T}, \mu)$ es regular, entonces $\forall A \in \mathcal{T}, \; \mu(A) < \infty, \Rightarrow \mu(A) = \sup\limits_{K\subset A, \; K\in\mathcal{K}} \mu(K)$

- Las medidas de Lebesgue-Stieltjes son regulares
- $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_F, \mu_F)$ es regular, más aún:
  $\forall A \subset \mathbb{R}, \; \mu_F(A) = \inf\limits_{\theta\subset A, \; \theta\in\Theta} \mu_F(\theta)$
- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, \mu)$ un espacio de medida finita, entonces μ es regular.

Medidas con Signo. $\mu : \mathcal{C} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

- Las medidas con signo están acotadas inferiormente
- Una medida a valores en $\mathbb{R}$ es acotada (μ y $-\mu$)
- Una medida con signo **NO** es monótona.

- (Teo. Hanh-Jordan) $(X, \mathcal{T}, \mu)$ medida con signo:
  $\mu_+(A) = \sup\limits_{B \in \mathcal{T},\ C \subset A} \mu(B)$
  $\mu_-(A) = -\inf\limits_{B \in \mathcal{T},\ C \subset A} \mu(B)$
  $|\mu|(A) = \sup\limits_{(A_i) \subset \mathcal{PF}(A)} \sum |\mu(A_i)|$
  $\mu_+,\ \mu_-,\ |\mu|$ son medidas a valores en $\overline{\mathbb{R}}_+$ Además μ_- es medida finita y $\mu = \mu_+ - \mu_-$
  Finalmente existe una partición $P,\ N \in \mathcal{T}$ tal que $P \cup N = X$ y $P \cap N = \emptyset$
  Con esto:

$$\forall A \in \mathcal{T} \begin{cases} \mu_+(A) = \mu(A \cap P) \\ \mu_-(A) = -\mu(A \cap N) \quad \text{(El mismo } N \text{ y } P \text{ para todo } A) \end{cases}$$

Integración. Definamos primero la función Indicatriz:

- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$

f se dice simple si: $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ (Podemos considerar A_i disjuntos)
$\xi(\mathbb{R})$= Funciones simples; $\xi(\mathbb{R}_+)$= Funciones simples positivas.

- $f : X \to Y$, con $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{F})$ espacios medibles. Se dice que f es medible si:
  $\forall F \in \mathcal{F},\ f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$, (Caso importante: $(Y, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$)
  Podemos relajar esto por: $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$
  f es medible ssi $\forall C \in \mathcal{C},\ f^{-1}(C) \in \mathcal{T}$
- $f : X \to \mathbb{R}$ es medible ssi $\forall a \in \mathbb{R},\ f^{-1}(-\infty, a) \in \mathcal{T}$
- Si $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$, con f_n medibles, entonces:
  $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$, $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$ son medibles. ($\overline{\lim} f_n = \inf\limits_n \sup\limits_{k \geq n} f_n$, $\underline{\lim} f_n = \sup\limits_n \inf\limits_{k \geq n} f_n$)
  f_n converge puntualemente a $f \Leftrightarrow \overline{\lim} f_n = \underline{\lim} f_n = f$
- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medible, entonces $\exists f_n : X \to \mathbb{R}_+$ **simples** tal que $fn \nearrow f$

Definición de Integral. $(X, \mathcal{T}, \mu)$ espacio de medida.

$f \in \xi_+$, entonces $\displaystyle\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$, (La integral no depende de la representación de f)

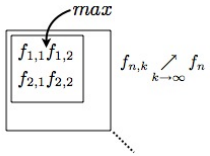
- $(f_n) \subset \xi(\overline{\mathbb{R}}_+)$ monótonas, con $g \leq \lim_k f_k$
  Entonces $\displaystyle\int g\, d\mu \leq \lim_k \int f_k\, d\mu$

Ahora si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ medible y $f_n \in \xi(\overline{\mathbb{R}}_+)$ tal que $f_n \nearrow f$. Se define: $\displaystyle\int f d\,\mu = \lim_n \int f_n\, d\mu$ (no depende de las f_n)
Si f toma valores en $\overline{\mathbb{R}}$, entonces $f = f_+ - f_-$ y la integral está bien definida si: $\int f_+\, d\mu < \infty$ y $\int f_-\, d\mu < \infty$ (*)
f se dice integrable ($f \in \mathcal{L}^1$) si cumple (*)
Con esto:

- $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$
- Si $f \in \mathcal{L}^1$, entonces $\int f\, d\mu = \int f_+\, d\mu - \int f_-\, d\mu$
- $\int (\lambda f + g)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu + \int g\, d\mu$
- $f \leq g \Rightarrow \int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu$

Algunos teoremas y proposiciones:

- $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\overline{\mathcal{T}}$ medible $\Leftrightarrow \exists g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{T}$ medible tal que $\{x : g(x) \neq f(x)\}$ es despreciable.
  Con esto se puede suponer que $(X, \mathcal{T}, \mu)$ es completo.
- $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |f| < \infty$ c.t.p. Para sumar $f \oplus g = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si son finitas en } x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$
  $f \geq 0$ medible, $\int f\, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ c.t.p.



- $f_n \nearrow f$, $f_n \geq 0$ medibles, entonces $\displaystyle\int f_n\, d\mu \nearrow \int f\, d\mu$
  Para suc. decrecientes no se tiene.
- $g_n \geq 0$, $\sum g_n = g$
  $\int \sum g_n\, d\mu = \int g\, d\mu = \sum \int g_n\, d\mu$ Además $\sum g_n$ es integrable $\Leftrightarrow$ la serie $\sum \int g_n\, d\mu < \infty$ y se puede deducir que: $\sum g_n < \infty$ c.t.p.
- g_n medibles:
  Si $\sum \int |g_n|\, d\mu < \infty \Rightarrow \sum g_n$ converge.abs. c.t.p. y es integrable.
- $f_n \searrow f$; $f_n \geq 0$
  $f_n \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \int f_n\, d\mu \searrow \int f\, d\mu$
- **(Teorema Convergencia Monótona)**
  $f_n \nearrow f$ ($f_n \in \mathcal{L}^1$), $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow \lim_n \int f_n\, d\mu < \infty$ y $\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$
  Para sucesiones de funciones monótonas se puede intercambiar el límite con la integral, cuando la suc. de funciones es POSITIVA o cuando son integrables y $\lim_n \int f_n\, d\mu < \infty$
- (Lema de Fatou)
  $\int \underline{\lim} f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n\, d\mu$
  - $\underline{\lim} f_n \in \mathcal{L}^1$; $f_n \geq g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \int \underline{\lim} f_n\, d\mu \leq \underline{\lim} \int f_n\, d\mu$
  - $\overline{\lim} f_n \in \mathcal{L}^1$; $f_n \leq g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow \int \overline{\lim} f_n\, d\mu \geq \overline{\lim} \int f_n\, d\mu$
- $(f_n) \subset \mathcal{L}^1$; $|f_n| < g \in \mathcal{L}^1$ y $f_n \to f$ puntual.
  $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$; $\lim \displaystyle\int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$ y $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$
- **(Teorema Convergencia Dominada)** $(f_n) \subset \mathcal{L}^1$; $|f_n| < g \in \mathcal{L}^1$ c.t.p. y $f_n \to f$ c.t.p.
  $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1$; $\lim \displaystyle\int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$ y $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\mu \to 0$

Espacios L^p y $\mathcal{L}^p$.

- $f \in \mathcal{L}^p$ si $\int |f|^p\, d\mu < \infty$
  $f \in \mathcal{L}^\infty$ si $\exists M < \infty$; $\mu(\{x : |f(x)| \geq M\}) = 0$ (Acotadas c.t.p.)
  $||f||_p = (\int |f|^p\, d\mu)^{1/p}$
  $||f||_\infty = \inf \{M < 0 : |f| < M \ c.t.p.\}$
  $L^p = \mathcal{L}^p / \cong = \{[f] : f \in \mathcal{L}^p\}$
- L^p son Banach $p = 1, ..., \infty$