MA680 Análisis. Semestre 2009-01
Profesor: Carlos Conca Rosende
Auxiliares: Thomas Capelle

Guía III: Continuidad

Problemas.-

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua si y sólo si, dado $A \subseteq \mathbb{R}$; $\overline{A} = \mathbb{R}$, para todo punto $a \in A$, los conjuntos $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < a\}$ y $\{x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > a\}$ son abiertos.

2. Demuestre que la función
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1+|x|} \end{array}$$
es un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $(-1, 1)$.

3. Sean X, Y, Z espacios topológicos y f, g funciones continuas $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$. Demuestre que si f es sobreyectiva y $g \circ f$ es un homeomorfismo, entonces f y g son homeomorfismos.

4. Sean $X = Y = \{a, b, c\}$, $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$ y $\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, Y\}$. Encuentre todos los homeomorfismos de X en Y.

5. Sea f una inyección estrictamente creciente de un intervalo $[\alpha, \beta]$ sobre un intervalo $[a, b]$. Demuestre que f es continua y que f^{-1} existe y continua (asi f es un homeomorfismo).

6. Sean E, F espacios topológicos y $f : E \to F$ una función. Pruebe que son equivalentes:
   a) f es continua sobre E.
   b) $\forall\, B \subseteq F$, $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$.
   c) $\forall\, B \subseteq F$, $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\overline{B})$.

7. Sea X un conjunto, $(E, \mathcal{O})$ espacio topológico y $f : X \to E$ una función
   a) Demostrar que $\{f^{-1}(U)$ tal que $U \in \mathcal{O}\}$ define una topología en X (llamada topología inducida por f).
   b) Demostrar que esta es la topología menos fina sobre X tal que hará f continua.
   c) Demos trar que $A \subseteq X$ es un abierto (respectivamente cerrado) de X para la topología inducida por f ssi A es la imagen inversa por f de un abierto (respectivamente cerrado) de E.

8. a) Sean E, F y G espacios topológicos, y sean $f : E \to F$, $g : F \to G$ funciones. Suponga que F tiene la topología inducida por g. Demostrar que f es continua ssi $g \circ f$ es continua.
   b) Sea $g : F \to (G, \mathcal{O}_G)$, donde F tiene la topología inducida por g. Entonces pruebe que sobre E, la topología inducida por $f : E \to F$ es idéntica que la topología inducida por $g \circ f$.

9. Sean E, F espacios topológicos. Se dice que una función es abierta (resp. cerrada) si la imagen por f de cualquier abierto (resp. cerrado) de E es un abierto (resp. cerrado) de F.

   a) Pruebe que $f : E \to F$ es un homeomorfismo ssi f es una biyección, continua y abierta.

   b) Demuestre que la función

   $$\begin{array}{lcl} [0, 2\pi] & \to & [-1, 1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

   es cerrada.

   c) Sea $f : E \to (F, \mathcal{O}_F)$ una función sobreyectiva. Suponga que E tiene la topología inducida por f. PRuebe que f es abierta y cerrada.

10. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico E. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina la cola de la sucesión de extremo n por

    $$A_n = \{x_i \text{ tal que } i \geq n\}.$$

    Pruebe que

    $$\{x \in E \text{ tal que } x \text{ es un valor de adherencia de } (x_n)\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

11. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio topológico X.

    a) Demostrar que todo límite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es también límite de cualquier subsucesión infinita $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

    b) Demostrar que todo valor de adherencia de una subsucesión infinita $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ es también valor de adherencia de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

    c) Demuestre que las recíprocas de a) y b) son en general falsas.

12. Sean $(X, \mathcal{O})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Se llama vecindad cerrada de x a cualquier cerrado de X que contiene un abierto que contiene a x, esto es, cualquier cerrado de X que contenga una vecindad de x.

    a) Pruebe que son equivalentes

    i) $\forall\, x \in X$, el conjunto de las vecindades cerradas de x es una base de vecindades de x.

    ii) $\forall\, F$ cerrado de X y $\forall\, x \in \mathcal{C}_{\mathbb{X}} F$, exsite una vecindad de x y una vecindad de F (esto es abierto que contiene a F)disjuntas.

    b) Se dice que un espacio es regular si es separado y si cumple (i) o (ii). Sea

    $$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}^2 & \to & X \\ & (n, m) & \mapsto & a_{n,m} \end{array}$$

    una sucesión doble en X. Sea X regular, demuestre que

    $$\lim_{n,m\to\infty} a_{n,m} = a$$

    y si

    $$\lim_{n\to\infty} a_{n,m} = b_m$$

    entonces

    $$\lim_{m\to\infty} b_m = a$$

13. Demuestre que un espacio X es separado ssi todo singleton de un punto $x \in X$ es igual a la intersección de sus vecindades cerradas.