

Capítulo 3

Programación no lineal

3.1 Introducción

Los capítulos 1 y 2 se dedicaron a los problemas de programación lineal, en los que las restricciones y la función a optimizar eran lineales.

Aunque los problemas de programación lineal son muy comunes y cubren un amplio rango de aplicaciones, en la vida real uno se tiene que enfrentar con cierta frecuencia a otro tipo de problemas que no son lineales. Cuando el conjunto de restricciones, la función objetivo, o ambos, son no lineales, se dice que se trata de un *problema de programación no lineal* (PPNL).

En este capítulo se presentan algunos problemas de programación no lineal. En algunos casos, coinciden con los que se han descrito en capítulos precedentes, pero bajo hipótesis distintas.

3.2 Algunos ejemplos geométricos

En esta sección, se describen algunos problemas de programación no lineal de carácter geométrico que pueden resolverse analíticamente.

3.2.1 El paquete postal

Un paquete postal es una caja de dimensiones x , y , y z (ver la Figura 3.1), que debe verificar los siguientes requisitos para ser aceptado en la oficina de correos. La altura más el perímetro de la base no puede exceder 108 cm

$$z + 2x + 2y \leq 108; \quad x, y, z \geq 0$$

pues no son posibles las longitudes negativas.

Se buscan las tres dimensiones que maximizan el volumen

$$V(x, y, z) = xyz$$

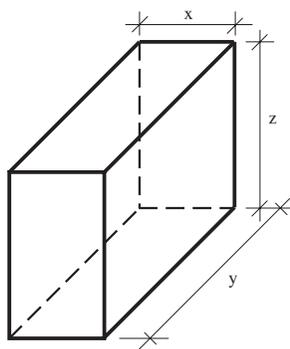


Figura 3.1: Esquema de las dimensiones del paquete postal.

3.2.2 La tienda de campaña

Una tienda tiene una base cuadrada de lado $2a$, cuatro paredes verticales de altura b , y un tejado que es un pirámide de altura h (ver la Figura 3.2). Si el volumen total V y la altura total H de la tienda están dados, el problema que se plantea es el de encontrar los valores óptimos a , b y h tales que la tienda resultante tenga una superficie mínima (se necesita un mínimo de material).

En este caso se pretende minimizar la superficie de la tienda. Como la superficie total es la suma de la superficie de las cuatro paredes más el tejado, se debe minimizar

$$S(a, b, h) = 4(2ab + a\sqrt{h^2 + a^2})$$

Las condiciones que deben exigirse se refieren al volumen total y la altura total; así, debe tenerse

$$\begin{aligned} V &= 4a^2 \left(b + \frac{h}{3}\right) \\ H &= b + h \end{aligned}$$

Además, todas las variables deben ser no negativas, es decir, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $h \geq 0$.

3.2.3 La bombilla

Una bombilla está situada justo encima del centro de un círculo de radio r . Suponiendo que la intensidad de luz en cualquier punto de la circunferencia es proporcional a la raíz cuadrada del seno del ángulo con el que el rayo de luz llega a tal punto, y al inverso de la distancia a la bombilla, d , encontrar la altura óptima de la bombilla, de suerte que la intensidad en la circunferencia (frontera del círculo) sea máxima.

Se debe maximizar la intensidad de luz en los puntos de la circunferencia de radio $r = 30$ cm. Sea I la intensidad, medida en unidades apropiadas, que depende del seno del ángulo formado por el rayo de luz y el horizonte. En el

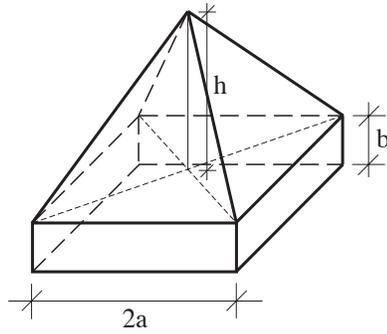


Figura 3.2: Esquema de la tienda de campaña.

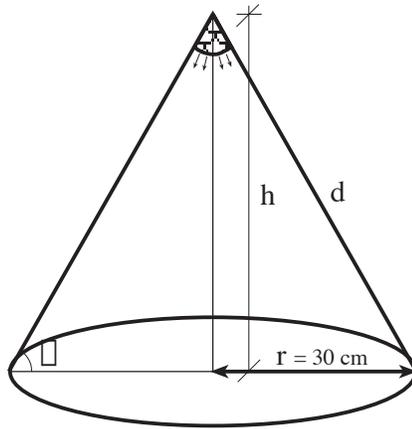


Figura 3.3: Esquema del ejemplo de la bombilla.

triángulo de la Figura 3.3 se ve que

$$\sin \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + r^2}}; \quad d = \sqrt{h^2 + r^2}$$

Así se puede escribir

$$I(h) = k \frac{h^{1/2}}{(h^2 + r^2)^{3/4}}$$

donde $k > 0$ es una constante de proporcionalidad. Esta expresión debe maximizarse con respecto a h , recordando que debe tenerse $h \geq 0$.

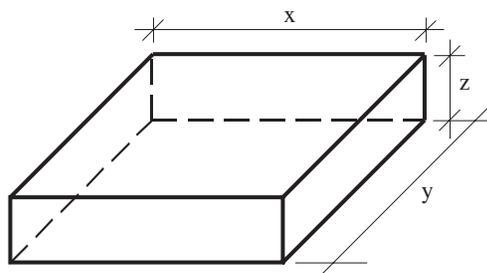


Figura 3.4: Boceto del problema del transporte de arena.

3.2.4 La superficie

Para encontrar el punto de la superficie tridimensional, $xyz = 1$, más cercano al origen, se debe minimizar la función (distancia al origen):

$$D(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

sujeto a la restricción de que el punto debe estar en la superficie:

$$xyz = 1$$

3.2.5 El transporte de arena

El coste de transportar arena de un lugar a otro en un contenedor de dimensiones x , y y z es 2 dólares por cada viaje completo (véase la Figura 3.4). Suponiendo que el precio del material de las paredes superior e inferior, y de los laterales del contenedor son el triple y el doble, respectivamente, de las paredes anterior y posterior, encontrar el precio mínimo de transportar $c = 50m^3$ de arena.

Si z es la altura del contenedor, el precio del mismo será

$$k(3xy + 2(2xz + 2yz) + xy)$$

donde $k = 4$ es una constante de proporcionalidad. Se debe añadir el precio del transporte en sí, que viene dado por

$$2 \frac{50}{xyz}$$

El precio total, que debe minimizarse, es entonces

$$C(x, y, z) = k(3xy + 2(2xz + 2yz) + xy) + 2 \frac{50}{xyz}$$

bajo las restricciones $x, y, z \geq 0$.

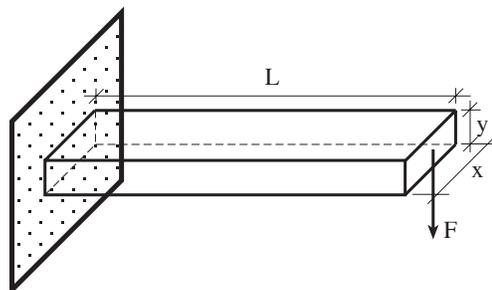


Figura 3.5: Voladizo.

3.3 Algunos ejemplos mecánicos

Otra categoría importante de ejemplos se refieren a situaciones que surgen en ingeniería mecánica. Se incluyen varias situaciones típicas que pueden darse en condiciones diversas. Todos ellos serán resueltos posteriormente.

3.3.1 El voladizo

Desea diseñarse un voladizo de sección rectangular y longitud dada para conseguir peso mínimo, y a la vez asegurar una deformación máxima transversal bajo la acción de una carga vertical actuando en el extremo libre. El material para construir el voladizo tiene un peso específico conocido.

Sean x e y la anchura y altura (véase la Figura 3.5) que se buscan. Sean L , F , S , y γ , la longitud, la carga en el extremo libre, la deformación máxima permitida, y el peso específico, respectivamente, esto es, el conjunto de datos de nuestro problema. El objetivo es minimizar el peso

$$W(x, y) = \gamma Lxy.$$

Como la anchura x debe ser mayor que $0.5y$, de acuerdo con la teoría de *resistencia de materiales*, la deformación en el extremo libre viene dada por $FL^3/3EI$, donde E es el módulo de Young del material del voladizo, e $I = xy^3/12$ es el correspondiente momento de inercia de la sección rectangular, se tiene que minimizar $W(x, y)$ bajo las restricciones

$$\begin{aligned} \frac{4FL^3}{Exy^3} &\leq S \\ x &\geq 0.5y \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

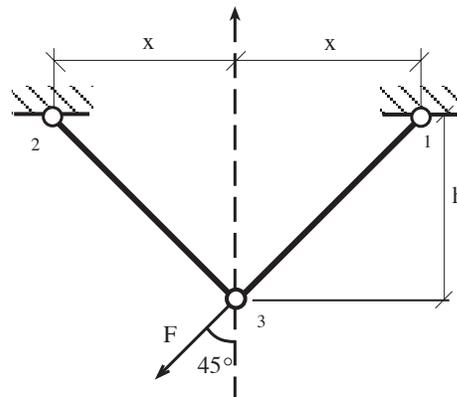


Figura 3.6: Estructura de dos barras usada en la sección 3.3.2.

3.3.2 La estructura de dos barras

Se desea diseñar la estructura con dos barras de la Figura 3.6 según tres objetivos distintos: peso mínimo, la tensión máxima no debe exceder un cierto umbral, y el desplazamiento en el pivote 3 no debe superar un cierto valor. El conjunto de datos del problema es:

γ : el peso específico del material de las barras

E : el módulo de Young del material de la estructura

F : la carga que actúa en el pivote fijo con un ángulo de 45° a la izquierda del eje Y

S_0 : la tensión máxima admisible

D_0 : el desplazamiento máximo admisible del pivote 3

h : la altura de la estructura

Las variables que se necesitan para determinar el diseño óptimo son

x : la distancia desde los pivotes fijos al eje Y

z : el área de la sección de los brazos de la estructura

D : el desplazamiento del pivote 3

S^1 : la tensión en el pivote 1

S^2 : la tensión en el pivote 2

W : el peso total de la de la estructura

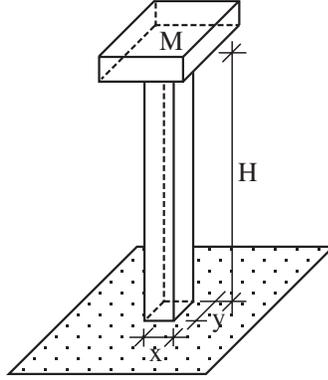


Figura 3.7: Columna sometida a pandeo.

Por tanto debe minimizarse

$$W(x, z) = 2\gamma z \sqrt{x^2 + h^2} \quad (3.1)$$

bajo

$$D(x, z) = \frac{F}{Eh^2 2\sqrt{2}} \frac{(h^2 + x^2)^{3/2} (h^4 + x^4)^{1/2}}{x^2 z} \leq D_0$$

$$S^1(x, z) = \frac{F}{2\sqrt{2}h} \frac{(x+h)\sqrt{x^2+h^2}}{xz} \leq S_0$$

$$S^2(x, z) = \frac{F}{2\sqrt{2}h} \frac{(h-x)\sqrt{x^2+h^2}}{xz} \leq S_0$$

$$x, z \geq 0$$

3.3.3 La columna sometida a pandeo

Se desea diseñar una columna uniforme de sección rectangular y de altura dada que soporte una masa dada en su extremo. Por un lado, nos gustaría minimizar la cantidad de material que debe usarse, pero por otro, sería bueno maximizar la frecuencia natural de las vibraciones transversales. Se trata de encontrar las dimensiones óptimas de tal columna evitando el colapso debido a la compresión y al pandeo (fallo de estabilidad) (véase la Figura 3.7).

El conjunto de datos del problema es

M : la masa que debe soportar la columna

H : la altura de la columna

D : peso específico del material que debe usarse

E : el módulo de Young del mismo material

S : la máxima tensión permitida (fuerza por unidad de superficie)

Las variables de diseño son las dos dimensiones, x e y , de la sección transversal de la columna.

El primer objetivo consiste en minimizar la masa total de la columna

$$W(x, y) = DHxy$$

El segundo objetivo es maximizar la frecuencia de la vibración transversal que, según nos enseña la mecánica, viene dada por

$$\left(\frac{Exy^3}{4H^3 \left(M + \frac{33}{140} DHxy \right)} \right)^{1/2}$$

Obsérvese que maximizar esta cantidad es equivalente a minimizar su recíproca.

Las restricciones que deben respetarse se refieren a las tensiones. Por un lado, la tensión no debe superar un cierto máximo S . Por otro lado, debe ser inferior a la tensión de pandeo. La tensión de compresión es Mg/xy donde g es la gravedad, mientras que la tensión de pandeo es $\pi^2 Ey^2/48H^2$. En definitiva deben exigirse las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \frac{Mg}{xy} &\leq S \\ \frac{Mg}{xy} &\leq \frac{\pi^2 Ey^2}{48H^2} \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

Suponiendo que ningún objetivo prevalece, debe minimizarse

$$Z = DHxy - \left(\frac{Exy^3}{4H^3 \left(M + \frac{33}{140} DHxy \right)} \right)^{1/2}$$

bajo las restricciones anteriores.

3.3.4 El sistema de vigas y cuerdas

En este ejemplo se considera una versión modificada del modelo de la Sección 1.7. Básicamente, se permite ahora que los datos dl_i , la distancia del punto de la viga b donde se aplica la carga i ($i \in \Omega_b$), sea una variable en vez de un dato. Para enfatizar este hecho se cambia la notación y se usa xl_i en vez de dl_i . Además se necesita un nuevo dato, l_b , la longitud total de la viga $b \in B$. Las

restricciones en esta nueva situación serían

$$\begin{aligned}
 \sum_{s \in \Psi_b} t_s &= \sum_{i \in \Omega_b} x_i + \sum_{x \in \Theta_b} t_s, b \in B \\
 \sum_{s \in \Psi_b} dr_s t_s &= \sum_{i \in \Omega_b} x l_i x_i + \sum_{x \in \Theta_b} dr_s t_s, b \in B \\
 0 \leq t_s &\leq T_s, s \in S \\
 0 \leq x l_i &\leq l_b, i \in \Omega_b \\
 0 &\leq x_i
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

y la función a maximizar es

$$\sum_i x_i$$

En particular, si en el ejemplo concreto de la Figura 1.4 se permite que las cargas x_1 y x_2 se apliquen en los puntos que distan x_3 y x_4 desde el extremo izquierdo de las vigas 1 y 3, respectivamente, las ecuaciones de equilibrio se transforman en

$$\begin{aligned}
 t_E + t_F &= x_2 \\
 10t_F &= x_4 x_2 \\
 t_C + t_D &= t_F \\
 8t_D &= 6t_F \\
 t_A + t_B &= x_1 + t_C + t_D \\
 10t_B &= 2t_C + 10t_D + x_1 x_3
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si se expresan las tensiones en las cuerdas en términos de las variables independientes del problema, se concluye que se deben respetar las restricciones

$$\begin{aligned}
 t_F &= \frac{x_2 x_4}{10} \leq 100 \\
 t_E &= x_2 - \frac{x_2 x_4}{10} \leq 100 \\
 t_D &= \frac{3x_2 x_4}{40} \leq 200 \\
 t_C &= \frac{x_2 x_4}{40} \leq 200 \\
 t_B &= \frac{x_1 x_3}{10} + \frac{2x_2 x_4}{25} \leq 300 \\
 t_A &= x_1 - \frac{x_1 x_3}{10} + \frac{x_2 x_4}{50} \leq 300 \\
 0 &\leq x_3 \leq 10 \\
 0 &\leq x_4 \leq 10 \\
 0 &\leq x_1 \\
 0 &\leq x_2
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

que son no lineales. Así, se tiene un problema de programación no lineal.

La solución que se obtiene con GAMS es (véase la Sección 11.4.9)

$$Z = 700 \text{ en el punto } x_1 = 500; \quad x_2 = 200; \quad x_3 = 4.4; \quad x_4 = 5.0$$

Las correspondientes tensiones en las cuerdas son

$$t_A = 300; \quad t_B = 300; \quad t_C = 25; \quad t_D = 75; \quad t_E = 100; \quad t_F = 100$$

3.4 Algunos ejemplos de ingeniería eléctrica

Esta sección contiene algunos ejemplos con motivación eléctrica.

3.4.1 Estimación de estado en sistemas eléctricos

Los sistemas de energía eléctrica se extienden sobre naciones e incluso continentes para asegurar el suministro eléctrico a la industria, los negocios y los hogares. A lo largo de la red se encuentran situados aparatos de medida de diversos tipos.

Los voltímetros miden las tensiones con una cierta precisión. Se realiza una medida de tensión, que se designa por \hat{v}_i , en cada nudo i ; su nivel de calidad viene determinado por el parámetro σ_i^v . Cuanto menor es σ_i^v , mayor es la precisión de la medida.

Normalmente, las medidas de potencia activa se toman en los extremos de cada línea. Tales medidas de *potencia activa* que circula desde el nudo k hacia el nudo l de la línea $k-l$ se denota \hat{p}_{kl} y tiene un grado de precisión indicado por σ_{kl}^p . Del mismo modo, las medidas de *potencia reactiva* se encuentran en ambos extremos de toda línea y se indica por \hat{q}_{kl} con un grado de precisión asociado al parámetro σ_{kl}^q .

Además de la potencia activa, la potencia reactiva también viaja por las líneas de potencia. La potencia reactiva es una variable relacionada con los valores del voltaje. Si se dispone de suficiente potencia reactiva, el perfil del voltaje es adecuado, pero si no, tal perfil se deteriora. Finalmente, si la potencia reactiva disponible es mayor de la deseada, el perfil del voltaje se sobredimensiona.

El estado de la red de potencia se determina por los voltajes en los nodos. El valor del voltaje en cada nodo es un número complejo, expresado normalmente en forma polar. El módulo de este número complejo proporciona el valor del voltaje mientras que el ángulo es una medida de la “altura” relativa de este nudo. Cuanto mayor es la altura de un nudo, mayor es el flujo de la potencia activa desde este nudo hacia otros nudos conectados con él.

Para conocer el estado de la red de potencia, es necesario conocer las variables de estado. Típicamente se dispone de un número de medidas mayor que el mínimo requerido. Pero tales medidas no son exactas. Un modo racional de proceder consiste en usar todas las medidas para generar la mejor estimación del estado de la red.

Los voltajes (variables de estado) en la red se denotan por $v_i \angle \delta_i$ $i \in \Omega$, donde v_i es la magnitud del voltaje; δ_i es el ángulo del voltaje; y Ω , el conjunto de nudos de la red. Debe observarse que el ángulo de cualquier nudo fijo puede tomarse como el origen; así se pondrá $\delta_m = 0$, donde m es un nudo arbitrario.

Los ingenieros eléctricos han encontrado que la potencia activa desde el nudo k al l puede expresarse como

$$p_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) = \frac{v_k^2}{z_{kl}} \cos \theta_{kl} - \frac{v_k v_l}{z_{kl}} \cos(\theta_{kl} + \delta_k - \delta_l) \quad (3.5)$$

donde p_{kl} es la potencia activa desde el nudo k al l , y $z_{kl} \angle \theta_{kl}$ es un número complejo relacionado con los parámetros fijos de la línea $k-l$.

Los ingenieros eléctricos también han encontrado que la potencia reactiva desde el nudo k al l a través de la línea $k-l$ puede expresarse como

$$q_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) = \frac{v_k^2}{z_{kl}} \sin \theta_{kl} - \frac{v_k v_l}{z_{kl}} \sin(\theta_{kl} + \delta_k - \delta_l). \quad (3.6)$$

Los elementos principales de este problema son

1. Datos.

\hat{v}_i : la magnitud medida del voltaje en el nudo i

σ_i^v : la calidad de la medida del voltaje

\hat{p}_{kl} : la medida de la potencia activa desde el nudo k hacia el nudo l de la línea $k-l$

\hat{q}_{kl} : la medida de la potencia reactiva desde el nudo k hacia el nudo l de la línea $k-l$

σ_{kl}^p : el grado de precisión de \hat{p}_{kl}

σ_{kl}^q : el grado de precisión de \hat{q}_{kl}

Ω : el conjunto de nudos de la red

Ω_k : el conjunto de nudos conectados al nudo k

z_{kl} : la magnitud de la impedancia asociada a la línea $k-l$

θ_{kl} : el ángulo de la impedancia asociado a la línea $k-l$

2. Variables

v_i : la magnitud del voltaje en el nudo i

δ_i : el ángulo del voltaje en el nudo i

3. **Restricciones:** En este caso no existen restricciones; esto es, el problema descrito es un problema de programación no lineal sin restricciones.

4. **Función a minimizar.** Para estimar el estado de una red de potencia (es decir, para determinar el valor de las variables de estado) se minimiza el error cuadrático de cada medida con respecto a su estimación, es decir, se minimiza

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{\sigma_i^v} (v_i - \hat{v}_i)^2 + \sum_{k \in \Omega, l \in \Omega_k} \frac{1}{\sigma_{kl}^p} (p_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) - \hat{p}_{kl})^2 \\ & + \sum_{k \in \Omega, l \in \Omega_k} \frac{1}{\sigma_{kl}^q} (q_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l) - \hat{q}_{kl})^2 \end{aligned}$$

donde Ω_k es el conjunto de nudos conectados al nudo k , y $p_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l)$ y $q_{kl}(v_k, v_l, \delta_k, \delta_l)$ están dados en (3.5) y (3.6). Obsérvese cómo los factores $1/\sigma_i^v$, $1/\sigma_{kl}^p$, y $1/\sigma_{kl}^q$ ponderan los errores según las calidades de las mediciones.

Ejemplo 3.1 (estimación del estado de una red). Considérese un circuito de dos nudos y una única línea conectándolos. La línea se caracteriza por la constante $z_{12} \angle \theta_{12} = 0.15 \angle 90^\circ$. Las magnitudes de las mediciones de los voltajes en los nudos 1 y 2 son respectivamente 1.07 y 1.01. Las mediciones de potencia activa en ambos extremos de la línea son respectivamente 0.83 y 0.81, y las medidas de potencia reactiva en ambos extremos son respectivamente 0.73 y 0.58.

El origen para los ángulos se toma en el nudo 2. Todos los aparatos medidores tiene idéntica precisión.

El problema de la estimación del estado de dicho circuito se formula minimizando

$$\begin{aligned} Z = & (v_1 - 1.07)^2 + (v_2 - 1.01)^2 + \left(\frac{1}{0.15}v_1v_2 \sin \delta_1 - 0.83\right)^2 \\ & + \left(-\frac{1}{0.15}v_1v_2 \sin \delta_1 - 0.81\right)^2 + \left(\frac{1}{0.15}v_1^2 - \frac{1}{0.15}v_1v_2 \cos \delta_1 - 0.73\right)^2 \\ & + \left(\frac{1}{0.15}v_2^2 - \frac{1}{0.15}v_1v_2 \cos \delta_1 - 0.58\right)^2 \end{aligned}$$

sin restricción alguna.

La solución de este problema es

$$\begin{aligned} v_1 &= 1.045 \\ v_2 &= 1.033 \\ \delta_1 &= 0.002 \end{aligned}$$

■

3.4.2 Reparto óptimo de carga

El propósito de una red de transmisión de potencia es transportar la potencia eléctrica desde los generadores hasta los puntos de demanda. El objetivo del problema del flujo de potencia óptima consiste en determinar la producción de potencia de cada generador de modo que toda la demanda se satisfice con coste mínimo al tiempo que se respetan las restricciones propias de la red. Además de satisfacer la demanda, los valores del voltaje a lo largo de la red debe mantenerse en unos niveles aceptables. La potencia reactiva debe transmitirse a lo largo de la red, y su demanda debe ser satisfecha.

La potencia activa neta (generación menos demanda) que llega a un nudo debe expresarse como función de todos los voltajes y ángulos en la red

$$p_{Gi} - P_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik})$$

donde p_{Gi} es la potencia activa generada en el nudo i ; P_{Di} , la potencia activa demandada en el nudo i ; v_i , la magnitud del voltaje; δ_i , el ángulo en el nudo i ; y_{ik} , el módulo; y θ_{ik} , el argumento de una constante compleja que depende de la topología y la estructura física de la red; n , el número de nudos de la red.

De manera análoga, la potencia reactiva neta que llega a un nudo i puede expresarse en función de todas las magnitudes y ángulos del voltaje en la red;

$$q_{Gi} - Q_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik})$$

donde q_{Gi} es la potencia reactiva generada en el nudo i ; y Q_{Di} es la potencia reactiva demandada en el nudo i .

La magnitud del voltaje de todo nudo debe estar limitada superior e inferiormente

$$\underline{V}_i \leq v_i \leq \bar{V}_i$$

donde \underline{V}_i es la cota inferior para la magnitud del voltaje en el nudo i , y \bar{V}_i la cota superior.

Los generadores pueden producir potencia activa por encima de una cierta cota inferior y por debajo de una cierta cota superior

$$\underline{P}_{Gi} \leq p_{Gi} \leq \bar{P}_{Gi}$$

donde \underline{P}_i es la mínima potencia activa que puede salir del generador i y \bar{P}_i es la máxima.

De la misma manera, los generadores pueden producir potencia reactiva entre una cota inferior y una superior

$$\underline{Q}_{Gi} \leq q_{Gi} \leq \bar{Q}_{Gi}$$

donde \underline{Q}_i es la mínima potencia reactiva de salida en el generador i y \bar{Q}_i es la máxima.

Los cuatro elementos de este problema son

1. Datos

n : el número de nudos en la red

(y_{ik}, θ_{ik}) : un número complejo que tiene módulo y_{ik} , y argumento θ_{ik} el cual depende de la topología y estructura física de la red

P_{Di} : la demanda de potencia activa en el nudo i

Q_{Di} : la demanda de potencia reactiva en el nudo i

\underline{V}_i : la cota inferior para el módulo del voltaje en el nudo i

\bar{V}_i : la cota superior para el módulo del voltaje en el nudo i

\underline{P}_{Gi} : la potencia activa de salida mínima del generador i

\bar{P}_{Gi} : la potencia activa de salida máxima del generador i

- \underline{Q}_{Gi} : la potencia reactiva de salida mínima del generador i
 \overline{Q}_{Gi} : la potencia reactiva de salida máxima del generador i
 C_i : el precio por unidad de potencia activa en el generador i

2. Variables

- v_i : el voltaje en el nudo i
 δ_i : el ángulo en el nudo i
 p_{Gi} : la potencia activa generada en el nudo i
 q_{Gi} : la potencia reactiva generada en el nudo i

3. Restricciones.

Hay distintos tipos de condiciones.

- (a) Equilibrio de potencia activa:

$$p_{Gi} - P_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- (b) Equilibrio de potencia reactiva:

$$q_{Gi} - Q_{Di} = v_i \sum_{k=1}^n y_{ik} v_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

- (c) Cotas para las variables:

$$\begin{aligned} \underline{V}_i &\leq v_i \leq \overline{V}_i, & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \underline{P}_{Gi} &\leq p_{Gi} \leq \overline{P}_{Gi}, & \forall i = 1, 2, \dots, n \\ \underline{Q}_{Gi} &\leq q_{Gi} \leq \overline{Q}_{Gi}, & \forall i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

- (d) Cotas para los ángulos:

$$-\pi \leq \delta_i \leq \pi, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

El origen para los ángulos se sitúa de modo arbitrario en cualquier nudo (por ejemplo, el nudo k , $\delta_k = 0$).

4. **Función a minimizar.** Dada C_i , el precio de producción de la unidad de potencia activa en el generador i , el flujo óptimo de potencia se convierte en la minimización de

$$Z = \sum_{i=1}^n C_i p_{Gi}$$

bajo todas las restricciones anteriores.

Ejemplo 3.2 (flujo óptimo de potencia). Considérese una red con 3 nudos y 3 líneas. Los parámetros de tal red son

$$\begin{aligned} y_{11} &= 22.97, & \theta_{11} &= -1.338 \\ y_{22} &= 21.93, & \theta_{22} &= -1.347 \\ y_{33} &= 20.65, & \theta_{33} &= -1.362 \\ y_{12} = y_{21} &= 12.13, & \theta_{12} = \theta_{21} &= 1.816 \\ y_{13} = y_{31} &= 10.85, & \theta_{13} = \theta_{31} &= 1.789 \\ y_{23} = y_{32} &= 9.81, & \theta_{23} = \theta_{32} &= 1.768 \end{aligned}$$

El nudo 1 es un generador con cotas inferior y superior para la potencia activa generada de 0 y 3, respectivamente, y para la potencia reactiva de -1 y 2, respectivamente. Las cotas para la generación de potencia activa para el generador 2 son, respectivamente, 0 y 3, y para la potencia reactiva -1 y 2, respectivamente. El nudo 3 es de consumo con una demanda de 4.5 y 1.5. Los límites permitidos para el módulo del voltaje en los nudos 2 y 3 son, respectivamente, 0.95 y 1.10, y para el nudo 1 son 0.95 y 1.13, respectivamente. El precio de producción en el generador en el nudo 1 es 6 y en el generador del nudo 2 es 7. Supóngase un periodo de 1 hora y póngase el origen de voltajes en el nudo 3. Este problema tiene la siguiente estructura. Minimizar

$$6p_{G1} + 7p_{G2}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} 0 &= p_{G1} - 22.97v_1^2 \cos(1.338) - 12.13v_1v_2 \cos(\delta_1 - \delta_2 - 12.127) \\ &\quad - 10.85v_1v_3 \cos(\delta_1 - \delta_3 - 10.846) \\ 0 &= p_{G2} - 21.93v_2^2 \cos(1.347) - 12.13v_2v_1 \cos(\delta_2 - \delta_1 - 12.127) \\ &\quad - 9.81v_2v_3 \cos(\delta_2 - \delta_3 - 9.806) \\ 0 &= -4.5 - 20.65v_3^2 \cos(1.362) - 10.85v_3v_1 \cos(\delta_3 - \delta_1 - 10.846) \\ &\quad - 9.81v_3v_2 \cos(\delta_3 - \delta_2 - 9.806) \\ 0 &= q_{G1} - 22.97v_1^2 \sin(1.338) - 12.13v_1v_2 \sin(\delta_1 - \delta_2 - 12.127) \\ &\quad - 10.85v_1v_3 \sin(\delta_1 - \delta_3 - 10.846) \\ 0 &= q_{G2} - 21.93v_2^2 \sin(1.347) - 12.13v_2v_1 \sin(\delta_2 - \delta_1 - 12.127) \\ &\quad - 9.81v_2v_3 \sin(\delta_2 - \delta_3 - 9.806) \\ 0 &= -1.5 - 20.65v_3^2 \sin(1.362) - 10.85v_3v_1 \sin(\delta_3 - \delta_1 - 10.846) \\ &\quad - 9.81v_3v_2 \sin(\delta_3 - \delta_2 - 9.806) \end{aligned}$$

Tabla 3.1: Ejemplo de una tabla de contingencia

	t_{ij}				
	B_1	B_2	\dots	B_n	r_i
A_1	t_{11}	t_{12}	\dots	t_{1n}	r_1
A_2	t_{21}	t_{22}	\dots	t_{2n}	r_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
A_m	t_{m1}	t_{m2}	\dots	t_{mn}	r_m
c_j	c_1	c_2	\dots	c_n	

$$\begin{aligned}
0.95 &\leq v_1 \leq 1.13 \\
0.95 &\leq v_2 \leq 1.10 \\
0.95 &\leq v_3 \leq 1.10 \\
0 &\leq p_{G1} \leq 3 \\
0 &\leq p_{G2} \leq 3 \\
-1 &\leq q_{G1} \leq 2 \\
-1 &\leq q_{G2} \leq 2 \\
-\pi &\leq \delta_1 \leq \pi \\
-\pi &\leq \delta_2 \leq \pi \\
&\delta_3 = 0
\end{aligned}$$

La solución óptima local, que se ha obtenido mediante GAMS (véase la Sección 11.4.11), es

$$\begin{aligned}
Z &= 30.312 \\
p_{G1} &= 3.000 \\
p_{G2} &= 1.759 \\
q_{G1} &= 1.860 \\
q_{G2} &= 0.746 \\
v_1 &= 1.130 \\
v_2 &= 1.100 \\
v_3 &= 0.979 \\
\delta_1 &= 0.190 \\
\delta_2 &= 0.174
\end{aligned}$$

■

3.5 El problema de la matriz equilibrada

Los ingenieros, estadísticos, sociólogos, y otros, usan información experimental que se estructura en tablas de contingencia (véase la tabla 3.1).

Los elementos en estas tablas se clasifican de acuerdo con dos criterios. El primero, llamado A , tiene m categorías y el segundo, llamado B , tiene n categorías. De este modo, cada elemento puede clasificarse en una de las $m \times n$ celdas.

El contenido de estas celdas puede variar en el tiempo. El problema de la matriz equilibrada está relacionado con la actualización de estas tablas, suponiendo que se conocen las sumas en filas y columnas de las tablas actualizadas.

Por ejemplo, imagínese que nos interesa conocer la inmigración y cómo ésta cambia con el tiempo. Cada flujo migratorio debe clasificarse según su origen y destino. El objetivo consiste en estimar el número de personas que emigra desde cada par de ciudades. Para este fin, se puede trabajar con un censo que, debido a razones de costes, se hace cada 10 años. Además se dispone de información anual sobre las emigraciones netas en cada ciudad, y que debe usarse para actualizar las tablas de contingencia anuales.

Supóngase una tabla de contingencia desactualizada $m \times n$ con entradas $\{t_{ij}\}$, y denótese la tabla actualizada como $\mathbf{T} = (T_{ij})$, donde T_{ij} es el contenido de la celda $i - j$. Supóngase que se conocen las sumas de las columnas y las filas de la nueva matriz \mathbf{T} , es decir, se debe respetar la restricción

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} = r_i, i = 1, \dots, m \quad (3.7)$$

$$\sum_{i=1}^m T_{ij} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (3.8)$$

donde los parámetros $r_i; i = 1, \dots, m$ y $c_j; j = 1, \dots, n$ son conocidos.

Se necesitan introducir condiciones adicionales que reflejen que (en la mayoría de las aplicaciones) la celda representa contadores de elementos (son no negativos):

$$T_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

Nuestro objetivo consiste en obtener una matriz con la misma estructura que la anterior pero verificando las restricciones en la suma de filas y columnas. Así, la función objetivo seleccionada es una distancia entre $\{t_{ij}\}$ y $\{T_{ij}\}$:

$$Z = F(\mathbf{T}, \mathbf{t}) \quad (3.9)$$

Una posibilidad consiste en usar la función ponderada de mínimos cuadrados

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \omega_{ij} (T_{ij} - t_{ij})^2 \quad (3.10)$$

donde ω_{ij} (los pesos) son escalares positivos dados. Otra alternativa es la función de entropía (cambiada de signo)

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{T_{ij} \log T_{ij}}{t_{ij}} - T_{ij} + t_{ij} \quad (3.11)$$

Obsérvese cómo $Z = 0$ cuando $T_{ij} = t_{ij}; \forall i, j$, y que Z aumenta con la discrepancia entre T_{ij} y t_{ij} .

Resumiendo, los elementos de este problema son

Tabla 3.2: Matriz origen-destino obtenida como resultado de la encuesta

	t_{ij}				r_i
	1	2	3	4	
1	–	60	275	571	906
2	50	–	410	443	903
3	123	61	–	47	231
4	205	265	75	–	545
c_j	378	386	760	1061	2585

1. Datos

r_i : la suma de todos los elementos de la fila i

c_j : la suma de todos los elementos de la columna j

t_{ij} : el contenido observado de la celda $i - j$

2. Variables

T_{ij} : el contenido estimado de la celda $i - j$

3. Restricciones

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} = r_i, i = 1, \dots, m \quad (3.12)$$

$$\sum_{i=1}^m T_{ij} = c_j, j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

$$T_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n \quad (3.14)$$

4. Función a minimizar.

La función (3.10) ó (3.11).

Ejemplo 3.3 (distribución de viajes). Un ejemplo de un problema práctico que puede abordarse en el contexto de este modelo es la predicción de la matriz de distribución T de viajes en una ciudad. En este ejemplo se trata esta situación. Considérese un área pequeña que se ha dividido en cuatro zonas y supóngase que una cierta encuesta ha dado como fruto la matriz de viajes de la tabla 3.2.

Los dos conjuntos de restricciones (3.7)–(3.8) reflejan nuestro conocimiento sobre la generación y atracción de viajes en las zonas del área bajo estudio. Nos interesan las entradas de la matriz que pueden interpretarse como viajes. Las estimaciones del número total de viajes futuros que acaban o salen de cada zona se dan en la tabla 3.3.

Tabla 3.3: Estimaciones del número total de viajes futuros en cada zona

Zonas	Destinos futuros estimados (r_i)	Orígenes futuros estimados (c_j)
1	12,000	6,750
2	10,500	7,300
3	3,800	10,000
4	7,700	9,950

Tabla 3.4: Solución basada en la función de entropía

	T_{ij}				
	1	2	3	4	r_i
1	–	1997.893	4176.466	5825.642	12,000
2	1364.381	–	5293.379	3842.240	10,500
3	2322.858	1195.024	–	282.118	3,800
4	3062.761	4107.084	530.156	–	7,700
c_j	6750	7300	10,000	9950	34,000

Tabla 3.5: Solución basada en mínimos cuadrados ponderados

	T_{ij}				
	1	2	3	4	r_i
1	–	1700.324	4253.616	6046.060	12,000
2	1250.923	–	5484.550	3764.527	10,500
3	2396.886	1263.701	–	139.413	3,800
4	3102.191	4335.975	261.835	–	7,700
c_j	6750	7300	10,000	9950	34,000

En este problema las variables intrazonales se han eliminado, es decir, las variables T_{ii} $i = 1, \dots, 4$ han sido eliminadas de la formulación.

Se han usado dos contrastes. El primero se basa en (3.11), y la solución se da en la tabla 3.4. Las estimaciones en el segundo caso se han obtenido mediante (3.9), con $\omega_i = 1/T_{ij}$. La solución se encuentra en la tabla 3.5.

■

3.6 El problema de la asignación de tráfico

La planificación del tráfico ha motivado un buen número de modelos matemáticos. El análisis de estos modelos ayuda a planificar y predecir los efectos que determinados cambios en la red de tráfico tendrán en la buena marcha de la red. El esquema típico de planificación del transporte usado en las aplicaciones consta de cuatro etapas:

1. **Fase de generación de viajes.** Esta etapa comienza considerando un sistema de zonificación y una serie de datos relativos a cada zona del estudio. Estos datos, que incluyen información sobre la actividad económica, la distribución social, los recursos educacionales y lúdicos, los espacios para compras, se usan para estimar el número total de viajes generados y atraídos a cada zona bajo estudio.
2. **Fase de distribución.** La siguiente etapa consiste en la adjudicación de estos viajes entre orígenes y destinos, determinando la llamada matriz de viajes origen-destino.
3. **Descomposición modal.** A continuación, la descomposición modal produce la adjudicación de viajes a modos diversos. En esta fase las matrices origen-destino se obtienen para cada modo de transporte. Sus elementos son el número total de viajes por modo de transporte para cada par origen-destino O-D ω .
4. **Asignación.** Finalmente, la última etapa requiere la *asignación* de estos viajes a la red de transporte. Este ejemplo trata sobre la asignación de automóviles privados a la red de tráfico.

Debe introducirse un principio que gobierne el comportamiento de los usuarios al elegir la ruta en la red. Wardrop [102]) fué el primero en enunciar formalmente este principio: “Bajo condiciones de equilibrio, el tráfico se organiza en redes congestionadas de tal modo que ningún vehículo puede reducir el tiempo de viaje mediante un cambio de ruta.”

Este principio se ha usado como punto de partida para confeccionar modelos de asignación en equilibrio. Un corolario de este principio es que si todos los viajeros perciben el tiempo de los viajes del mismo modo, bajo condiciones de equilibrio, todas las rutas utilizadas entre un par O-D tienen el mismo tiempo mínimo mientras las no usadas requieren un tiempo igual o mayor.

Beckman et al. [10] formularon el siguiente problema de optimización para expresar las condiciones de equilibrio que se derivan del primer principio de Wardrop. Este modelo predice el nivel de uso de los diferentes arcos de la red. Así, puede usarse para responder cuestiones como qué ocurriría en el nivel de uso de la red si se construyera una nueva carretera o si la capacidad de una determinada ruta se modificara.

Los elementos principales de este problema son:

1. **Datos**

$(\mathcal{N}, \mathcal{A})$: una grafo dirigido $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$, que se entiende como un modelo de la red de tráfico con un conjunto de nodos \mathcal{N} , y un conjunto de arcos \mathcal{A} que representan las calles. El conjunto de nodos \mathcal{N} del grafo representan intersecciones o también los llamados centroides, que indican las zonas del estudio (orígenes y destinos).

W : el conjunto de pares orígenes–destinos.

d_ω : datos de entrada que representan el número de viajes en coche desde el origen i al destino j , para cada par origen–destino $\omega = (i, j)$. La matriz de pares origen–destino $\{d_\omega\}_{\omega \in W}$ se obtiene en la fase de distribución modal.

$C_a(f_a)$: una función de coste que indica el retraso en el arco $a \in \mathcal{A}$, para cada arco $(i, j) \in \mathcal{A}$, como función del flujo total f_a que lleva el mismo arco a .

\mathcal{R}_ω : el conjunto de rutas para el par $\omega = (i, j)$.

2. Variables

h_r : el flujo en la ruta r

f_a : el flujo en el arco a

3. **Restricciones.** El número de usuarios de un par origen–destino ω es la suma del número total de usuarios en caminos distintos que satisfacen tal par:

$$\sum_{r \in \mathcal{R}_\omega} h_r = d_\omega, \quad \forall \omega \in W \quad (3.15)$$

Además, el flujo de cada camino debe ser no negativo:

$$h_r \geq 0, \quad \forall r \in \mathcal{R}_\omega, \quad \forall \omega \in W \quad (3.16)$$

El flujo de cada arco a es la suma del flujo en todos los caminos que lo usan:

$$\sum_{\omega \in W} \sum_{r \in \mathcal{R}_\omega} \delta_{a,r} h_r = f_a \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

donde $\delta_{a,r} = 1$ si $r \in \mathcal{R}_\omega$ contiene el arco a , y 0 en otro caso.

4. **Función a optimizar.** El problema de asignación de tráfico minimiza la siguiente función:

$$Z = \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{f_a} C_a(x) dx \quad (3.17)$$

Como resultado del volumen creciente de tráfico, la velocidad en los arcos tiende a disminuir. La función C_a , es decir el tiempo necesario para atravesar el arco a , tiene en cuenta este hecho. Estas funciones en el análisis de sistemas

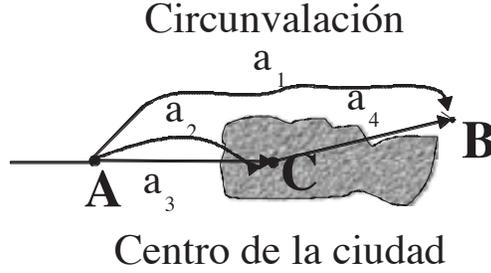


Figura 3.8: Diagrama para la red de carreteras.

de tráfico son positivas, no lineales y estrictamente crecientes. Los parámetros que relacionan el tiempo de viaje, C_a , en el arco en función del flujo f_a , en él, es el *tiempo de viaje libre de flujo*, c_a^0 , y la capacidad práctica del arco, k_a , que es una medida del flujo a partir del cual, el tiempo de viaje se incrementará muy rápidamente si el flujo aumenta. La expresión más común para $C_a(f_a)$, llamada la función BPR, es

$$C_a(f_a) = c_a^0 + b_a \left(\frac{f_a}{k_a} \right)^{n_a} \quad (3.18)$$

Ejemplo 3.4 (problema de asignación de tráfico). Considérese el problema de una ciudad con una vía de circunvalación y varias rutas centrales según se ilustra en la Figura 3.8. Imagínese que se realizan 4000 viajes desde A hasta B , y 2500 desde A hasta C . Las rutas disponibles para satisfacer la demanda del par $\omega_1 = (A, B)$ son $r_1 = a_1$, $r_2 = a_2 - a_4$, y $r_3 = a_3 - a_4$, y las rutas para el par $\omega_2 = (A, C)$ son $r_4 = a_2$ y $r_5 = a_3$. En este ejemplo $W = \{w_1, w_2\}$, y $\mathcal{R}_{\omega_1} = \{r_1, r_2, r_3\}$ y $\mathcal{R}_{\omega_2} = \{r_4, r_5\}$. Las variables de flujo en los caminos son h_1, \dots, h_5 , y las variables de flujo en los arcos son f_1, \dots, f_4 .

Como

$$\begin{aligned} \int_0^{f_a} C_a(x) dx &= \int_0^{f_a} c_a^0 + b_a \left(\frac{x}{k_a} \right)^{n_a} dx \\ &= c_a^0 f_a + \frac{b_a}{n_a + 1} \left(\frac{f_a}{k_a} \right)^{n_a + 1} \end{aligned}$$

la formulación completa es como sigue. Minimizar

$$Z = \sum_{i=1}^4 \int_0^{f_{a_i}} C_{a_i}(x) dx = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_{a_i}^0 f_{a_i} + \frac{b_{a_i}}{n_{a_i} + 1} \left(\frac{f_{a_i}}{k_{a_i}} \right)^{n_{a_i} + 1} \quad (3.19)$$

sujeto a

$$h_1 + h_2 + h_3 = 4000 \quad (3.20)$$

$$h_4 + h_5 = 2500 \quad (3.21)$$

$$h_1 = f_1 \quad (3.22)$$

Tabla 3.6: .Parámetros para las funciones BPR

Enlace a	k_a	c_a^0	b_a	n_a
1	500	5	1	4
2	400	7	1	4
3	400	10	1	4
4	500	2	1	4

Tabla 3.7: Estimación de los viajes

Flujo en los arcos		Flujo en las rutas	
a_1	3845.913	r_1	3845.913
a_2	2354.419	r_2	154.087
a_3	299.667	r_3	0.000
a_4	154.087	r_4	2200.333
		r_5	299.667

$$h_2 + h_4 = f_2 \quad (3.23)$$

$$h_3 + h_5 = f_3 \quad (3.24)$$

$$h_2 + h_3 = f_4 \quad (3.25)$$

$$h_1, \dots, h_5 \geq 0 \quad (3.26)$$

En este ejemplo se han usado las funciones en (3.18), y la tabla 3.6 muestra los parámetros. La solución correspondiente se encuentra en la tabla 3.7. ■

Ejercicios

- Una mesa debe pasar a través de un ángulo recto en un pasillo de A unidades de anchura hacia otro de B unidades de ancho. ¿Cuáles son los tamaños de la mesa (a unidades de ancho y b unidades de largo) que permite tal movimiento?
- Se desea construir un hospital entre dos ciudades que distan D entre sí. El lugar elegido corresponde al menos contaminado en la línea que une las dos ciudades. Sabiendo que la contaminación es proporcional a los residuos de las industrias presentes y al inverso de la distancia más 1, y que la segunda ciudad genera 3 veces más actividad industrial que la primera, determinar el lugar óptimo para el hospital.
- Encontrar la mínima longitud de una escalera que debe apoyarse sobre la pared si una caja de dimensiones a y b está colocada justo en el rincón de

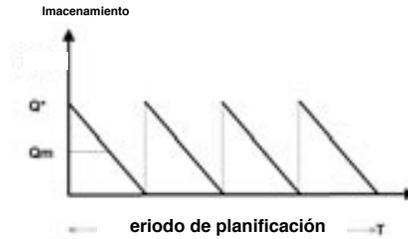


Figura 3.9: Evolución de la reserva con el tiempo.

Tabla 3.8: Coste del almacenamiento y del pedido de los dos artículos

Bien	C_s	C_r	Demanda
A	1 dólar	18 dólares	365 toneladas
B	2 dólares	25 dólares	365 toneladas

esa misma pared. Formular el problema como una situación de programación no lineal.

- 3.4 Se desea encontrar la máxima longitud de una viga que debe moverse a través de la puerta de una sala suponiendo que la altura de la puerta es h y está situada a una distancia d de la pared frontal. La altura de la sala puede suponerse infinita. Formular esta situación como un problema de programación no lineal.
- 3.5 Considérese la siguiente situación de gestión de inventarios. La demanda de un cierto bien es constante a lo largo de un horizonte de 365 días. La persona encargada del cuidado del bien tiene en cuenta un coste de almacenamiento de $C_s = 1$ dólar por día y tonelada del citado bien, y un precio fijo para preparar un pedido (con independencia del tamaño) de $C_r = 18$ dólares. La demanda es 365 toneladas para el horizonte considerado. La Figura 3.9 indica la evolución de la reserva asumiendo que el almacén está vacío al principio del periodo, y se ha realizado una petición en el instante inicial. La reserva media, Q_m , se calcula como $Q/2$, donde Q es la cantidad pedida. Formular un problema de programación no lineal para decidir el tamaño del pedido con objeto de minimizar el coste de la gestión del inventario.
- 3.6 Repítase el problema 3.5 añadiendo un segundo producto. Los parámetros para cada artículo están en la tabla 3.8. Supóngase que el almacén tiene una capacidad máxima de 60 toneladas. Formular el correspondiente problema como una situación de programación no lineal.
- 3.7 Un productor de electricidad debe planificar su producción de energía eléctrica cada hora para maximizar los beneficios durante un determina-

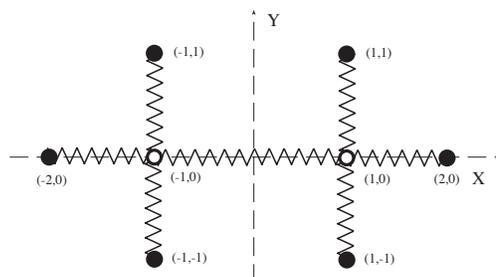


Figura 3.10: Sistema de muelles.

do número de horas. Formular el problema de programación no lineal subyacente teniendo en cuenta que:

- El productor no trabaja antes del periodo citado.
- Los precios por hora de la energía decrecen linealmente con la producción de energía en la hora correspondiente.
- La energía mínima que puede producirse cada hora es cero y la máxima una determinada cantidad.
- La producción de energía en dos horas consecutivas no puede diferir en más de una cantidad preestablecida.
- El precio de producción es lineal.

- 3.8 Examínese el sistema de muelles de la Figura 3.10. Los puntos negros están fijos mientras que los blancos corresponden a enlaces libres. Todos los nodos pueden rotar libremente de modo que los muelles siempre se sitúan a lo largo de la línea que une los dos extremos. Cada muelle se caracteriza por una constante positiva k_i , $i = 1, \dots, 7$ en unidades apropiadas. Se postula que la configuración de equilibrio de los puntos blancos es la que minimiza la energía global de todos los muelles donde la energía de cada muelle es proporcional (con constante k_i) al cuadrado de la distancia entre los extremos. Formular el problema como un problema de programación no lineal.

Parte II
Métodos

