Medida e Integración

Profesor: Jaime San Martín

Auxiliares: Cristóbal Guzmán, Omar Larré y Julio Backhoff

P1) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad. Sea $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{F}_n\right) = \mathcal{F}$.

a) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $n \geq 1$ se tiene:

$$\forall \lambda > 0 \ , \ \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f| d\mathbb{P}$$

donde $E_n = \{\omega \in \Omega : \text{máx}_{1\leq k\leq n} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k) > \lambda\}$. Para ello suponer que $f \geq 0$ y definir para $1 \leq k \leq n$:

$$E_k^n = \{\omega \in \Omega : [\forall j \in \{1, ..., k-1\} \ , \ \mathbb{E}[f|\mathcal{F}_j](\omega) \leq \lambda] \wedge [\mathbb{E}[f|\mathcal{F}_j](\omega) > \lambda]\}$$

Probar que $E_k^n \in \mathcal{F}_k$ y que $E_n = \bigcup_{k=1}^n E_k^n$. Luego pruebe que $\int_{E_n} f d\mathbb{P} \geq \lambda \mathbb{P}(E_n)$ y luego concluya el resultado para f general.

b) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)(\omega) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} \int_\Omega |f| d\mathbb{P}$$

c) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ se tiene que

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ en } L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Para esto puede ocupar (sin probar) que dada $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $\epsilon > 0$ se puede encontrar una función $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$, para algún $n \geq 1$, tal que $||f - g||_{L^1} < \epsilon$.

d) Probar que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y $g \in \bigcup_{n\geq 1} L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ se tiene que

$$\mathbb{P}\left\{\limsup_{n\to\infty} |\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) - f| > \lambda\right\} \leq \frac{4}{\lambda} \int_\Omega |f - g| d\mathbb{P}$$

Concluya que para toda $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ puntualmente } \mathbb{P} - c.s.$$

P2) Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espacio de probabilidad y sea $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia creciente de sub σ-álgebras de $\mathcal{F}$ (que llamamos «filtración»). Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de variables aleatorias (que llamamos proceso estocástico) tales que $X_n \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$ para todo n. Decimos que este proceso es una **martingala** si para todo n

$$\mathbb{E}\left(X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right) = X_n \text{ c.s.}$$

a) Sea $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Muestre que el proceso $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ es una martingala.

b) Muestre que un proceso integrable $(X_n)_{n\geq 0}$ es una martingala si y solo si $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0$ para todo n. Concluya

c) Sea $(Y_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas de ley Normal$(0, \sigma^2)$, con $\sigma > 0$. Llamemos $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n)$ y definamos $X_n := Y_1 + ... + Y_n$. Recordemos además que $\mathbb{E}\left(e^{uY_1}\right) = e^{\frac{u^2\sigma^2}{2}}$.

- Muestre que X_n es martingala.
- Sea $Z_n^u = exp\left\{uX_n - \frac{nu^2\sigma^2}{2}\right\}$. Muestre que para todo $u \in \mathbb{R}$ el proceso Z_n^u es una martingala.
- Muestre que, para cada u, el proceso Z_n^u converge casi seguramente a una variable aleatoria finita (y encuentre su límite en función de u). ¿Es posible encontrar $Z \in L^1$ tal que $Z_n^u = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_n)$?.