Medida e Integración

Profesor: Jaime San Martín

Auxiliares: Cristóbal Guzmán y Julio Backhoff

1. Una función $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, con $-\infty \leq a < b \leq \infty$, se dice **convexa** si:

$$F(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda F(s) + (1 - \lambda)F(t) \ , \forall s, t \in (a, b) \text{ y } \lambda \in (0, 1)$$

a Muestre que F es convexa si y solo si para todos $s, t, \bar{s}, \bar{t} \in (a, b)$ tales que $s \leq \bar{s} < \bar{t}$ y $s < t \leq \bar{t}$:

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \leq \frac{F(\bar{t}) - F(\bar{s})}{\bar{t} - \bar{s}}$$

b Muestre que F es convexa si y solo si F es absolutamente continua sobre todo intervalo compacto de (a, b) y F' es creciente (en el conjunto donde esté definida).

c Muestre que si F es convexa y $t_0 \in (a, b)$, entonces existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) - F(t_0) \geq \beta(t - t_0) \ , \forall t \in (a, b)$$

d (Desigualdad de Jensen) Si (X, M, μ) es un espacio de probabilidad ($\mu(X) = 1$), $g : X \to (a, b)$ está en $L^1(\mu)$, y F es convexa en (a, b), entonces:

$$F\left(\int g d\mu\right) \leq \int F \circ g d\mu$$

2. Muestre que la siguiente función $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}$ en continua pero no es de variación acotada:

$$\alpha(x) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & , \text{si } x = 0 \\ xcos(\frac{\pi}{x}) & , \text{si } x \neq 0 \end{array} \right\}$$

3. a (Principio de Selección de Helly) Sea $f_n : X \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones uniformemente acotada, y sea D cuanquier subconjunto numerable de X. Entonces existe una subsucesión de f_n que converge puntualmente sobre D.

b Sea $A \subset [a, b]$ tal que $a \in A$ y $b = Sup(D)$. Muestre que si $f : D \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces f se puede extender sobre $[a, b]$ por una función creciente.

c Sea f_n una sucesión de funciones crecientes sobre $[a, b]$ uniformemente acotada. Muestre que esta posee una subsucesión que converge puntualmente a una función creciente f en $[a, b]$ (que está acotada por la misma cota que la sucesión).

d (Usando lo anterior, demostrar el «Primer Teorema de Helly»:
Sea f_n una sucesión acotada en $BV[a, b]$, i.e. $||f_n||_{BV} < K$, $\forall n$. Entonces existe una subsucesión que converge puntualmente sobre $[a, b]$ a una función $f \in BV[a, b]$ (que satisface igualmente $||f||_{BV} < K$).