Medida e Integración

Profesor: Jaime San Martín

Auxiliares: Cristóbal Guzmán, Omar Larré y Julio Backhoff

1. [Desigualdades de Young]
   - Sea $f \in L^p$ y $g \in L^1$, con $1 \leq p \leq \infty$. Mostrar que $(f*g)(x)$ existe c.t.p. , $f*g \in L^p$ y $||f*g||_p \leq ||f||_p||g||_1$
   - Si $p^{-1} + q^{-1} = 1$, con $f \in L^p$ y $g \in L^q$. Entonces $(f*g)(x)$ existe $\forall x$, $f*g$ es acotada y uniformemente continua, $||f*g||_\infty \leq ||f||_p||g||_q$. Además, si $1 < p < \infty$ entonces $f*g \in C_\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ (las funciones que se anulan al infinito).

2. Sea $\mathcal{M} = \{\mu : \mu$ es medida con signo sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ y $|\mu|(R) < \infty\}$, donde $|\mu|$ es la variación total. Recordar que $\mathcal{M}$ con la norma $||\mu|| := |\mu|(\mathbb{R})$ es un e.v. de Banach.
   Para $\mu, \nu \in \mathcal{M}$ definiremos su convolución $\mu * \lambda$ como:
   $$(\mu * \lambda)(A) := (\mu \otimes \lambda)(A_2)$$
   para todo $A \in \mathcal{B}$, donde $A_2 := \{(x, y) : x + y \in A\}$.

   a) Demuestre la fórmula
   $$(\mu * \lambda)(A) = \int \mu(A - t) d\lambda(t)$$
   para todo $\lambda, \mu \in \mathcal{M}$ y todo $A \in \mathcal{B}$ (donde $A - t = \{x - t : x \in A\}$).

   b) Demostrar que $\mu * \lambda \in \mathcal{M}$ y que $||\mu * \lambda|| \leq ||\mu||||\lambda||$.

   c) Demostrar que $\mu * \lambda$ es la única medida $\nu \in \mathcal{M}$ tal que
   $$\int f d\nu = \int \int f(x + y) d\mu(x) d\lambda(y)$$
   para toda $f \in C_c(\mathbb{R})$

   d) Suponga que $d\mu = f dm$ y $d\lambda = g dm$, con $f, g \in L^1(m, \mathbb{R})$ y m la medida de Lebesgue. Mostrar que $d(\mu * \lambda) = (f * g) dm$