

# CONTROL 3

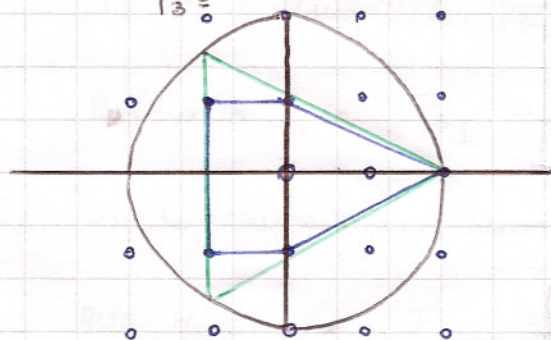
## PREGUNTA 4

a)  $P_n$  es acotado para todo  $n \Rightarrow P_n$  tiene v rtices para todo  $n$ .

b)  $D = P_1 = \{0,1\}$

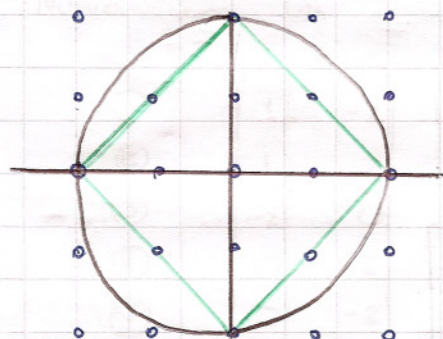
$$P_2 = [0,1] \times [0,1]$$

$$P_3 =$$



$(0, \frac{1}{2})$  es un v rtice,  
luego  $P_3$  no es entero

na



$P_4$  es entero

Ahora si  $n \geq 4$  se tiene que si  $n \neq 4m$  para  $m \in \{1,2,\dots\}$  entonces el ~~v rtice~~ punto  $(1,0)$  o el punto  $(0,1)$  estarán fuera de  $P_n$

pero el punto  $(\frac{1}{2}, 0)$  o el punto  $(0, \frac{1}{2})$  respectivamente estarán dentro de  $P_n$ , luego  $P_n$  tendrá algún v rtice no entero.

Por otro lado si  $n = 4m$  para  $m \in \{1,2,\dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$  se tiene que los puntos  $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$  est n dentro de  $P_n$  y por tanto  $P_n = P_4$ .

luego  $P_n$  es entero ssi  $n = 4m$  con  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   
~~luego para  $n = 4m$  con  $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$   $P_n$  es~~

c) B  $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

d) Para  $n \in \{1, 2, \dots, 4\}$  determine el rango de  $P_n$ .

$$P_1 \text{ es entero} \Rightarrow R(P_1) = 0$$

$$P_2 \text{ es entero} \Rightarrow R(P_2) = 0$$

$$P_4 \text{ es entero} \Rightarrow R(P_4) = 0$$

$$P_3 \text{ tiene rango } 1, \text{ ~~no es entero~~}$$

Notemos que  $P_{3I} = [0, 1] \times \{0\}$ , entonces

si logramos encontrar pruebas de planos cortantes a partir de  $A_3$

que describan  $P_{3I}$  sabremos que  $R(P_3) = 1$

Numereamos las restricciones, y sea  $A_3$  la matriz y  $b_3$  el vector

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \\ \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{2} \textcircled{3} \Rightarrow -x_1 \leq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0 \\ \frac{1}{2} \textcircled{4} \Rightarrow x_2 \leq 0 \\ \frac{1}{2} \textcircled{5} \Rightarrow -x_2 \leq 0 \Leftrightarrow x_2 \geq 0 \\ \frac{1}{2} \textcircled{1} + \frac{1}{2} \textcircled{2} \Rightarrow x_1 \leq 1 \end{array}$$

si tomamos  $y_i^T = (0 \ 0 \ \frac{1}{2} \ 0 \ 0)$  tenemos que

$$y_i^T A = (-1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2}, \text{ tomando el plano cortante tenemos}$$

una prueba de  $\textcircled{6} \boxed{-x_1 \leq 0} \Leftrightarrow x_1 \geq 0$

Ahora tomemos  $\textcircled{6}$  multiplicado por  $\frac{1}{2}$  y sumemos  $\textcircled{1}$  multiplicado por  $\frac{1}{2}$ , obtenemos

$$-\frac{1}{2}x_1 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - x_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$-x_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \textcircled{7} \boxed{-x_2 \leq 0} \Leftrightarrow x_2 \geq 0$$

tomando ⑥ y ②

$$-\frac{1}{2}X_1 \leq 0$$

$$\frac{1}{2}X_1 + X_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{8} \quad X_2 \leq 0$$

tomando ① ② ④ y ⑦

$$X_1 - 2X_2 \leq 1$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 1$$

$$2X_2 \leq 1$$

$$-2X_2 \leq 0$$

$$2X_1 \leq 3$$

$$X_1 \leq 3/2 \Rightarrow$$

$$X_1 \leq 1$$

⑨

tomando  $\frac{1}{2}$  ① y  $\frac{1}{2}$  ②

$$\frac{1}{2}X_1 - X_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}X_1 + X_2 \leq \frac{1}{2}$$

$$X_1 \leq 1$$

Note que ⑥ ⑦ ⑧ y ⑨ describen  $P_3 \cap$  por

tanto tenemos una prueba de que  $R(P_3) = 1$ .

c) Para  $P_1$  es fácil ver q cualquier submatriz <sup>de  $A_1$</sup>  no singular  
cuadrada tiene determinante  $0, 1, -1$

Para  $P_2$  también vemos  $A_2$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ LD} \Rightarrow \text{revisemos}$$

linealmente  
dependientes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquí es fácil ver  
q no hay submatriz  $B$   
de con  $\text{Det}(B) \neq 0, 1, -1$

$P_3$  no es entero  $\Rightarrow A_3$  no es ~~entera~~ TU

~~Para~~

Para  $P_4$  vemos  $A_4$

$$\text{LD} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ LD} \Rightarrow \text{revisemos}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

$\text{Det}(B) = 2 \Rightarrow A_4$  no es TU.