Ejercicios de Teoría Poliedral

Profesor: Martín Matamala
Profesor Auxiliar: Jairo Navarrete

15 de mayo de 2009

1. Ejercicio 1

Dado $P = \{x \in \mathbb{R} : Ax \leq b\}$ un poliedro, definimos P_I como el casco convexo de los vectores enteros en P.

Sea $P = \{(x, y) \in \mathbb{N} : y \leq \sqrt{2}x\}$ Pruebe que P_I NO es un poliedro.

2. Ejercicio 2

Pruebe que el casco convexo de vectores característicos de (matchings) emparejamientos de tamaño k en un grafo G es el conjunto de soluciones de:

$$x(\delta(v)) \leq 1, \text{ para todo } v \in V$$

$$x(\gamma(S)) \leq (|S| - 1)/2, \text{ para todo } S \subseteq V, |S| \text{ impar}$$

$$x(E) = k$$

$$x_e \geq 0, \text{ para todo } e \in E$$

3. Ejercicio 3

Muestre que son equivalentes:

1. La matriz A es Totalmente Unimodular (TU).
2. Para todo $J \subseteq N = \{1, ..., n\}$, existe una partición J_1, J_2 de J tal que

$$|\sum_{j \in J_1} a_{ij} - \sum_{j \in J_2} a_{ij}| \leq 1 \text{ para } i = 1, .., m.$$

Pista: 1) $\implies$ 2) Tomamos J un conjunto arbitrario de N y definimos z por $z_j = 1$ si $j \in J$, $z_j = 0$ si no. Tomemos $d' = 0$, $d = z$, $g = Az$, $b'_i = b_i = \frac{1}{2}g_i$ si g_i es par, y $b'_i = \frac{1}{2}(g_i - 1), b_i = b'_i + 1$ si g_i es impar. Considere

$$P(b, b', d, d') = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : b' \leq Ax \leq b, d' \leq x \leq d\}.$$

Note que P es no vacío, y que P es integral. note que existe un punto x^0 en el polihedro tal que $x^0_j = 0$ para $j \in N \setminus J$ y $x^0_j \in \{0, 1\}$ para $j \in J$. Escoja $J_1 = \{j \in J : z_j - 2x^0_j = 1\}$ y $J_2 = \{j \in J : z_j - 2x^0_j = -1\}$. y pruebe que se tiene la condicion 2).