

PROBLEMA:

Resuelve el problema bottleneck path problem: (T)

Dado un digrafo G , $c: E(G) \rightarrow \mathbb{R}$ y $s, t \in V(G)$ encontrar un s - t path cuyo arco mas largo es lo mas corto posible.

Set $l(s) := 0$ Set $l(v) := \infty$ para todo $v \in V(G) \setminus \{s\}$

Set $R := \emptyset$

② Find a vertex $v \in V(G) \setminus R$ tq $l(v) = \min_{w \in V(G) \setminus R} l(w)$

③ Set $R := R \cup \{v\}$

④ Para todo $w \in V(G) \setminus R$ tq $(v, w) \in E(G)$ hacer

si ~~$l(w) > c(v, w)$~~ entonces

~~$l(w) := c(v, w)$~~ ~~pc~~

si $(l(w) > l(v)) \& (l(w) > c(v, w))$ entonces

$l(w) = \max(l(v), c(v, w))$

$p(w) = v$

si $R \neq V(G)$ entonces vaya a ②

Proof:- Mostremos que los siguientes tienen cada vez que ② es ejecutado en el algoritmo:

a) Para todo $v \in R$ y todo $w \in V(G) \setminus R$: $l(v) \leq l(w)$

b)

Para todo $v \in R$: $l(v)$ es el tamaño de un ~~s-v~~ shortest s - v -bottleneck path en G . Si $l(v) < \infty$, existe un s - v bottleneck de tamaño $l(v)$ cuyo arco final es $(p(v), v)$ (a no ser $v=s$) y cuyos vértices pertenecen a R .

c) Para todo $w \in V(G) \setminus R$: $l(w)$ es el tamaño de un shortest s - v -bottleneck path ~~de t~~ en $G[R \cup \{w\}]$ si $l(w) \neq \infty$ entonces $p(w) \in R$ y $l(w) = \max(l(p(w)), c(p(w), w))$

Después de ① lo claro que se tiene ②, ③, y ④

Mostramos que ③ y ④ preservan ② y ⑤

Sea v el vértice escogido en ②

Para todo $x \in R$ y cualquier $y \in V(G) \setminus R$

$r(x) \leq r(y)$ por a) y por la elección de v se tiene $r(x) \leq r(v) = r(y)$ luego ③ preservará a)

y ④ no afecta esto pues si cambia $r(x)$ lo por un valor $\geq r(y)$

luego

Chequeamos que b) se preserve, para esto consideramos

un vértice $b \in R$ y suponemos que $r(b) > r(v)$

(no es un camino mínimo bottleneck)

entonces suponemos que existe un camino B en

tal que $\max_{e \in B} \{r(e)\} < r(v)$

$c(B) < r(v)$

For ⑤ sabemos además que $r(v)$ es un camino mínimo

en $R \cup \{v\}$, por tanto nos tenemos que es suficiente

mostrar que cualquier camino q tenga un vértice

$w \in V(G) \setminus R$ es más largo a v que v que v

que v tiene v

Sea w el primer vértice fuera de R (camino de s a v)

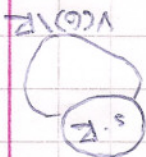
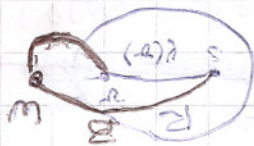
además por a) que $r(w) \leq c(B|_{s,w})$

como B es el camino más corto el camino q puede

seguir $c(B|_{s,w}) \leq c(B) < r(v)$ es decir

• $r(w) < r(v)$

pero esto no es posible por la elección de v



Mostremos que ③ y ④ preservan c)

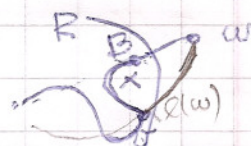
Tomemos un $w \in V(G) \setminus R$, si $p(w) \neq \infty$ entonces existe un path de tamaño $l(w) = \max(l(v), c(v, w))$

Ahora supongamos q' este no es el mínimo, sea B un path tq $c(B) < l(w)$, B debe contener a v , porque si no, ③ estaba siendo violado antes de ③

Además $l(x) \leq l(v)$ pues v entra en ③

$$l(w) \leq \max(l(x), c(x, w))$$

(si no lo hubiese pasado en ④)



entonces

$$l(w) \leq \max(l(x), c(x, w)) \leq \max(l(v), c(x, w)) \leq c(B)$$

$$l(w) \leq c(B) \quad \text{---}$$

$$\Theta(n^2)$$

Porque B contiene los dos $l(v)$, $c(x, w)$