Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

# Auxiliar Análisis

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

**Pregunta 1**
En clase se vio que si $S \subseteq \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$, donde $X$ es un e.t. compacto, se tiene que $S$ es compacto si y solamente si es equicontinuo y uniformemente acotado. Pruebe que la condición de uniformemente acotado se puede reemplazar por puntualmente acotado, i.e., $\forall x \in X$, el conjunto $\{f(x) : f \in S\}$ es acotado en $\mathbb{R}$.

**Pregunta 2**
Sean $E, F$ dos e.v.n. Decimos que $K \in \mathcal{L}(E, F)$ es una aplicación *compacta* si $K(B_E(0,1))$ es un conjunto precompacto en $F$.
*(i)* Sea $E = \mathcal{C}^1([a,b], \mathbb{R})$, dotado de $||f||_1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$, y sea $F = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, dotado de $||\,||_\infty$. Pruebe que $K : E \to F, K(f) = f$ es una aplicación compacta.
*(ii)* Sea $G : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $J : F \to F$, definida por $J(f)(t) = \int_a^t G(t, s, f(s))ds$. Demuestre que $J$ es compacta.

**Pregunta 3**
En esta pregunta, veremos otra forma de demostrar el *Teorema de Bolzano-Weirstrass*: "En $\mathbb{R}^n$, un conjunto es precompacto si y solamente si es acotado". Para ello, considere $X = \{1, ..., n\}$, dotado de la métrica discreta, y encuentre una isometría biyectiva entre $C(X, \mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^n$.

**Pregunta 4**
*(i)* Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Pruebe que los polinomios multivariados a coeficientes racionales son densos en $C(X, \mathbb{R})$.
*(ii)* Sean $X, Y$ espacios topológicos Haussdorf compactos. Muestre que el e.v. generado por las funciones $\{f(x)g(y) : f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), g \in \mathcal{C}(Y, \mathbb{R})\}$ es denso en $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbb{R})$.