Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Auxiliar 1 Análisis: Espacios Vectoriales Normados

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1 *(v)* Decimos que un e.v.n. es separable si admite un subconjunto denso numerable. Muestre que ℓ^∞ no es separable. *(Hint: Considere, para cada $A \subset \mathbb{N}$, la sucesión x^A, dada por $x_n^A = 1$ si $n \in A$, y $x_n^A = 0$ en otro caso.)*
(vi) Considere el conjunto $P = \{x \in \ell^1 : x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}\}$. Pruebe que P tiene interior vacío en ℓ^1.
Solución
(v) Notemos que tenemos una sucesión x^A para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, luego tenemos $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ de estas sucesiones. Notemos además que si $A \neq B$, i.e., s.p.g. $\exists m \in A/B$, luego $x_m^A = 1$, pero $x_m^B = 0$, luego $||x^A - x^B||_\infty = 1$ (no puede ser mayor, pues en cada coordenada ambas sucesiones valen siempre 0 o 1).
Sea entonces ahora $D \subseteq \ell^\infty$ denso. Para cada A, debe existir $z \in D$ tal que $||x^A - z|| < \frac{1}{3}$ (pues $\bar{D} = \ell^\infty$, en particular $x^A \in \bar{D}$). Pero entonces para $B \neq A$, tendremos que $||x^B - z|| = ||x^B - x^A - (z - x^A)|| \geq ||x^B - x^A|| - ||z - x^A|| \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, de lo que podemos concluir que $\forall A \subseteq N, \exists! z^A \in D$ tal que $||z^A - x^A|| \leq \frac{1}{3}$.
Por lo tanto, si definimos la función $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to D$, tal que $g(A) = z^A$, tendremos que resulta estar bien definida y es inyectiva, de lo que $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \leq |D|$. Así, hemos concluido que todo conjunto denso tiene cardinal estrictamente mayor que $\mathbb{N}$ de lo que se concluye que ℓ^∞ no es separable.
(vi) Probar que P tiene interior vacío equivale a probar que no hay ninguna bola contenida en P. Tomemos entonces $x \in P, r > 0$ y probemos que $B(x, r) \cap P^c \neq \emptyset$. En efecto, como $x \in \ell^1$, en particular converge a cero, luego $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m < r/2$. Consideremos entonces la sucesión z dada por $z_n = x_n$ si $n \neq m$, $z_m = x_m - r/2$. Es claro que $z \in \ell^1$ (queda propuesto verificarlo), y además $||x - z||_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n - z_n| = |x_m - z_m| = r/2 \Rightarrow z \in B(x, r)$. Pero además $z_m = x_m - r/2 < 0 \Rightarrow z \in P^c$, con lo que encontramos un punto en la intersección, que es lo queríamos probar.
Pregunta 2
Demuestre que en un e.v.n., los únicos conjuntos cerrados y abiertos al mismo tiempo son el conjunto vacío y el espacio entero.
Solución
Lo haremos por absurdo. Supongamos entonces que A es un conjunto abierto, tal que A^c es abierto también y ninguno es vacío. Tomemos entonces $x \in A, y \in A^c$. La idea será considerar el segmento que los une, y ver que pasa justo en el borde entre los dos conjuntos, y ahí llegar a una contradicción.
Sea entonces $r(t) = tx + (1 - t)y$, para $t \in [0, 1]$. Esta función parametriza el segmento que une x a y. Consideremos el punto $s = \sup\{t \in [0, 1] : r(t) \in A\}$, y sea $w = r(s)$. Veremos que $w \in adh(A)$ y que $w \in adh(A^c)$. En efecto, sea $\epsilon > 0$, y consideremos $z = r(s_0)$, con $s_0 = s - \frac{\epsilon}{2||x-y||}$. Como $s_0 < s$, tenemos que $z \in A$ (por definición de s). Pero además $||w - z|| = ||sx + (1 - s)y - sx + \frac{x\epsilon}{2||x-y||} - (1 - s)y - \frac{y\epsilon}{2||x-y||}|| \leq ||x\frac{\epsilon}{2||x-y||}|| + ||y\frac{\epsilon}{2||x-y||}|| = \frac{\epsilon}{2||x-y||}||x - y|| = \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow z \in B(w, \epsilon) \Rightarrow w \in adh(A)$. Similarmente, definiendo $v = r(s + \frac{\epsilon}{2||x-y||})$, encontramos que

$v \in adh(A^c)$ (por definición de s), y un cálculo análogo al anterior nos llevará a que $v \in B(w, \epsilon)$, de lo que concluimos que $w \in adh(A^c)$. Pero A y A^c son conjuntos cerrados, luego tenemos que $w \in A$ y también $w \in A^c$, lo que es una contradicción.