Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Control 3 - MA3801 Análisis

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Omar Larré, Andrés Fielbaum, Roberto Castillo
04 de julio de 2009

Problema 1
Sea $X = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, dotado de la norma uniforme $||\cdot||_\infty$, y sea F un subespacio cerrado de X, que solamente tiene funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Probaremos que F debe ser de dimensión finita. Para ello:

1. Sea $Y = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, dotado de $||f||_1 = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. Recuerde que en el Control 1 se probó que este es un espacio de Banach. Pruebe que F es cerrado como subespacio de Y.
2. Sea $B = \{f \in F : ||f||_\infty \leq 1\}$, la bola $||\cdot||_\infty$-unitaria en F. Pruebe que B es acotado para la norma $||\cdot||_1$.

   Indicación: Utilice un teorema relacionado con funciones lineales importante del curso.
3. Pruebe que B es $||\cdot||_\infty$-compacta y concluya.

Problema 2

1. Demuestre que es espacio $l^\infty := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$ dotado de la norma uniforme $||\cdot||_\infty$ es un espacio de Banach.
2. Demuestre que $\mathcal{C}_0 := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$ es un subespacio cerrado de l^∞.
3. Para $p \geq 1$ se define el espacio $l^p := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\}$, dotado de la norma $||x||_p = \left[\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right]^{1/p}$.

   Si $p, q \geq 1$ son tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, o si $p = 1$ y $q = \infty$, para $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^q$ definimos $\varphi_y : l^p \to \mathbb{R}$ por $\varphi_y(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$ para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$. Mostrar que $\varphi_y \in l^{p*}$ y que la aplicación $j : l^q \to l^{p*}$ definida por $j(y) = \varphi_y$ es contínua de norma menor o igual que uno.
4. Demuestre que para $1 \leq p < \infty$ la aplicación $j : l^q \to l^{p*}$ es un isomorfismo isométrico. Además, $j : l^1 \to \mathcal{C}_0^*$ es también un isomorfismo isométrico.
5. Demuestre que l^∞ no es separable.
6. Para $1 \leq p < \infty$ demuestre que en l^p el espacio generado por $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso. Demuestre lo mismo en el espacio $\mathcal{C}_0$. Concluya que estos espacios son separables.
7. Demuestre que $l^{\infty*}$ no es isomorfo a l^1.

   Indicación: Podría ser útil demostrar que si E es Banach y E^* es separable, entonces E es separable.
8. Demuestre que l^p es reflexivo para $1 < p < \infty$.
9. Demuestre que l^1, l^∞ y $\mathcal{C}_0$ no son reflexivos.

10. De ejemplos que muestren que en l^1 **NO** se verifican las siguientes propiedades (que siempre se verifican en un e.v.n. reflexivo):

  a) Si x^* en el dual verifica $||x^*|| = 1$, entonces existe x en el espacio tal que $|\langle x^*, x\rangle| = ||x||$.

  Indicación: Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión real creciente con limite igual a uno. Para $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1$ Considere $\varphi_\alpha(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$.

  b) Si M es un subespacio propio, entonces existe x en el espacio que verifica $||x|| = 1$ y que $d(x, M) = 1$.

  Indicación: Para el α de la indicación anterior, considere $M := \{x \in l^1 : \varphi_\alpha(x) = 0\}$, y muestre que dado $x \neq 0$ existe $z \in M$ tal que $||x - z|| < ||x||$.

  c) Si K es convexo cerrado, entonces para todo x en el espacio existe $y \in K$ tal que $||x - y|| \leq ||x - z|| \ \forall z \in K$.

  Indicación: Muestre que M es convexo cerrado.

  d) Si A, B son convexos cerrados disjuntos, uno de ellos acotados, entonces existe x^* en el dual y constantes C_1 y C_2 tales que

$$\langle x^*, x\rangle \leq C_1 < C_2 \leq \langle x^*, y\rangle \quad \forall x \in A, y \in B$$

  Indicación: Para $r = d(x, M)$ muestre que M y $\overline{B(x, r)}$ son convexos cerrados disjuntos.