Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Pauta Auxiliar 1 Análisis: Espacios Vectoriales Normados

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

P1

Pruebe que X^* separable $\Rightarrow X$ separable. Para ello:
i) Sea $\{f_n\}$ denso en X^*. Pruebe que $\forall n, \exists x_n \in \partial B(0,1)$ tq $|f_n(x_n)| \geq ||f_n||/2$.
ii) Pruebe que $< \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} >$ es denso en X. Hint: Proceda por contradicción y utilice un corolario de Hahn-Banach.
iii) Concluya.

P2

Sea $X = \ell^2, Y = \{x \in X : \sum_{n\in\mathbb{N}} n x_n^2 < \infty\}$. Sea $T : Y \to X$, dada por $(Tx)_n = n x_n$.
i) Pruebe que T no es continua
ii) Pruebe que T tiene el grafo cerrado
iii)¿Es Y un subespacio cerrado de X?

P3

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ existe para todo $x \in \ell^p$. Pruebe que $Lx := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \in (\ell^p)^*$.
ii) Sea $(a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ una matriz bi-infinita tal que $\forall x \in \ell^p, \forall n \geq 0$, el límite $y_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk} x_k$ existe y se tiene que $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r$. Pruebe que $Tx = y \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^r)$.

P4

Sea (a_{nk}) una matriz bi-infinita como en la pregunta anterior, que satisface la misma propiedad con $p = r = 2$. Note que ℓ^2 es un espacio de Hilbert. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(P) \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk} x_k = b_n$$

donde $b \in \ell^2$.
i) Probar que $||T|| \leq [\sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{nk}^2]^{1/2}$, donde T es el operador lineal definido en la pregunta anterior.
ii) Probar que si $\sum_{n\in\mathbb{N}}[(1-a_{nn})^2 + \sum_{k\in\mathbb{N}, k\neq n} |a_{nk}|^2] < 1$, entonces (P) tiene una solución única, que es una función continua de b.