

Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar Análisis

Profesor: Rafael Correa

Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1

Sea (X, τ) espacio topológico.

- (i) Probar que es Hausdorff ssi toda red tiene a lo más un límite.
- (ii) Suponga ahora que el espacio es Hausdorff. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Probar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x : x_n \text{ acumula en } x\}$ es un conjunto cerrado, y que si la sucesión es convergente, el conjunto es además compacto. ¿Es cierto lo mismo si consideramos redes en lugar de sucesiones?.

Pregunta 2 (*Topología Uniforme*)

Sea J un conjunto de índices infinito. En $\mathbb{R}^J$ definimos la distancia

$$d(x, y) = \sup_{j \in J} \bar{d}(x_j, y_j)$$

donde $\bar{d}(a, b) = \min(|a - b|, 1)$.

- (i) Muestre que $\bar{d}$ define una distancia en $\mathbb{R}$ y que la topología generada por esa distancia es la topología usual de $\mathbb{R}$. Muestre además que d define efectivamente una distancia en $\mathbb{R}^J$.
- (ii) Notemos por τ la topología generada por d (a esta topología se le conoce como la *Topología Uniforme*), y σ la topología producto. Muestre que τ es estrictamente más fina que σ .
- (iii) Suponga ahora $J = \mathbb{N}$, y sea $0 < \epsilon < 1$. Defina $V(x, \epsilon) = \prod_{j \in \mathbb{N}} B(x_j, \epsilon)$. Muestre que $V(x, \epsilon) \notin \tau$, y muestre además que $B_d(x, \epsilon) = \bigcup_{0 < \delta < \epsilon} V(x, \delta)$.