Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Guía Análisis

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1
Sea (X, τ) espacio topológico, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una red tal que toda subred acumula en $\bar{x}$. Muestre que $x_\alpha \to \bar{x}$.

Pregunta 2 *(Topología de la Convergencia Puntual)*
Sea X un conjunto, y $\mathcal{F} = \{f : X \to \mathbb{R} \| \text{ f es función}\}$. Para cada $f \in \mathcal{F}, \epsilon > 0$ y $E = \{x_1, ..., x_n\}$ subconjunto finito de X, defina

$$A(f, E, \epsilon) = \{g \in \mathcal{F} : |g(x) - f(x)| < \epsilon \, \forall x \in E\}$$

Muestre que estos conjuntos definen una base de vecindades en $\mathcal{F}$, y muestre que una red de funciones $(f_\alpha)_{\alpha\in D}$ en $\mathcal{F}$ converge a $f \in \mathcal{F}$ si y solamente si lo hace puntualmente (i.e., $\forall x \in X, f_\alpha(x) \to f(x)$).

Pregunta 3
Sea $X = [0,1]^{[0,1]}$, dotado de la topología producto. Considere la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ dada por $(z_n)_t =$ n-ésimo dgito de la expansión en binario de t (obs: si un número admite más de una expansión en binario, se considera cualquiera de las dos).
(i) Muestre que (z_n) tiene un punto de acumulación.
(ii) Muestre que (z_n) no admite ninguna subsucesión convergente.

Pregunta 4
Sea X el mismo conjunto que en la pregunta anterior. Note que los elementos de X se pueden ver como funciones de $[0,1]$ en si mismas.
(i) Muestre que $Z = \{f \in X : f \text{ es continua}\}$ es denso en X.
(ii) Sea $Y = \{1_{\{x\}} : x \in [0,1]\} \subseteq X$. Muestre que la topología inducida en Y es la topología discreta, y deduzca con esto que Y no es separable.
(iii) Muestre que $\bar{Y} - Y$ tiene un único elemento, y que toda vecindad de este elemento contiene todos los elementos de Y salvo por un número finito.

Pregunta 5
Decimos que un espacio topológico (X, τ) es *conexo por caminos* ssi $\forall x, z \in X, \exists r : [0,1] \to X$ *continua y tal que* $r(0) = x, r(1) = z$.
(i) Muestre que todo espacio conexo por caminos es conexo
(ii) Muestre que si X es un subconjunto abierto de un e.v.n. y es conexo, entonces es conexo por caminos.