Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
28 de Abril

Auxiliar Análisis: Espacios Topológicos

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1 *Espacios de Tychonoff*

Definición: Sea (X, τ) espacio topológico. Se dirá que es un *Espacio de Tychonoff* ssi es Haussdorf y $\forall x \in X, \forall V \in \tau$ tq $x \in V, \exists f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(x) = 1$ y $f(V^c) = \{0\}$. Durante toda la pregunta notaremos por $C(X)$ al espacio de las funciones continuas que van de X en $[0,1]$.
(i) Pruebe que todo espacio métrico es Tychonoff.
(ii) Pruebe que $[0,1]^{C(X)}$, dotado de la topología producto, es Tychonoff.
(iii) Defina $\psi : X \to [0,1]^{C(X)}$ por $\psi(x)_f = f(x)$ (se le llama la función evaluación de x). Pruebe que ψ es un homeomorfismo en su imagen (es decir, que al restringir el conjunto de llegada a $\psi(X)$, resulta ser un homeomorfismo).
(iv) Muestre que (X, τ) es Tychonoff $\Leftrightarrow$ (X, τ) es homeomorfo a un subespacio de $[0,1]^{C(X)}$.
(v) Muestre que X es compacto ssi $\psi(X)$ es cerrado en $[0,1]^{C(X)}$.

P2

Decimos que un espacio topológico (X, τ) satisface la *Condición de la Cadena Numerable (CCN)* si toda familia disjunta de abiertas es a lo más numerable.
(i) Muestre que si X es separable, entonces satisface CCN.
(ii) Muestre que la recíproca no es cierta. Para ello, sea X un conjunto no numerable cualquiera y defina $\Sigma = \{A \subseteq X : A^c \text{ es a lo más numerable}\} \cup \{\emptyset\}$.