Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
7 de Abril

Auxiliar Análisis: Espacios de Hilbert

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1
Sea H un espacio de Hilbert, sea $T \in \mathcal{L}(H,H)$.
(i) Muestre que $\forall y \in H, \exists! z \in H$ tal que $\forall x \in H, < T(x), y >=< x, z >$
(ii) Defina la función $T^* : H \to H$ que a cada $y \in H$ le asocia el z encontrado en la parte *(i)*. Muestre que $T^* \in \mathcal{L}(H,H)$ y que $||T^*|| \leq ||T||$. Pruebe además que $(T^*)^* = T$

Pregunta 2 *(Teorema Ergódico de Von Neumann)*
Probaremos el teo. ergódico de Von Neumann, que dice lo siguiente:
Sea H un Hilbert real, $T \in \mathcal{L}(H,H)$, con $||T|| \leq 1$. Sea $M = \{x \in H : T(x) = x\}$, y sea $P : H \to M$ la proyección sobre M. Entonces $\forall x \in H, \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(x) \to P(x)$. Para ello:
(i) Defina $N = adh\{T(x) - x : x \in H\}$. Pruebe que $N^\perp = M$.
(ii) Muestre que si $x \in M$ o si $x \in N$, el resultado es cierto, y concluya para $x \in H$ cualquiera.