Apunte para el Curso Análisis I

Felipe Alvarez D.

SANTIAGO 4 DE SEPTIEMBRE DE 2001

Índice General

1 Teoría Axiomática de Conjuntos 1

1.1 Introducción 1
1.2 Breve recuerdo de lógica simbólica 3
1.3 Definición axiomática de conjunto 6
1.4 Existencia y generación de conjuntos 10
1.5 El axioma del infinito y los enteros naturales 12
1.6 El axioma de elección 13
1.7 Relaciones 15
1.8 Equipotencia y cardinalidad 17
1.8.1 Propiedades de los conjuntos infinitos 18
1.9 El lema de Zorn 18
1.10 Números cardinales 19

2 Espacios Topológicos 23

2.1 Introducción 23
2.2 Definiciones preliminares y ejemplos 25
2.3 Bases de abiertos 30
2.4 Bases de vecindades 36
2.5 Operaciones topológicas elementales 38
2.6 Subespacios topológicos: Topología traza 42
2.7 Axiomas de separación 44
2.8 Convergencia: sucesiones y redes 47
2.9 Compacidad 51
2.10 Continuidad 53
2.10.1 Homeomorfismo 56
2.11 Topologia inducida por una familia de funciones 57
2.11.1 Topología producto 58
2.11.2 Topología cuociente 59
2.12 Conexidad 62

3 Completitud En Espacios Métricos 65
3.1 Sucesiones de Cauchy y Completitud 65
3.2 Aplicaciones de la completitud 66
3.3 Compacidad y completitud 67
3.4 Completación 67
3.5 Espacio de funciones continuas 68
3.6 Compacidad en $(\mathcal{C}(K,Y),d_\infty)$: Teorema de Arzela–Ascoli 69
3.7 Densidad en $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$: Teorema de Stone–Weierstrass . . 70

4 Espacios de Hilbert 73
4.1 Definiciones y propiedades básicas 73
4.2 Base Hilbertiana y Descomposición Ortogonal 74
4.3 Dualidad y topología débil 77

Capítulo 1

Teoría Axiomática de Conjuntos

1.1 Introducción

La noción de *Conjunto* sirve de fundamento para todas las matemáticas. Cada una de sus disciplinas suele presentar su respectivo campo de estudio como un tipo de conjuntos, entendidos intuitivamente como una colección de objetos caracterizados por ciertas condiciones. Para precisar un conjunto podemos intentar proporcionar una lista exaustiva de sus elementos, lo que se conoce como definición por extensión. Otra forma consiste en describir los elementos que constituyen un conjunto señalando las propiedades que poseen en común. Las propiedades de los objetos matemáticos se expresan mediante secuencias de símbolos tales como: letras minúsculas y mayúsculas de diversos alfabetos (latino, griego, etc.), símbolos de la lógica clásica , signos propiamente matemáticos ($=$, $\in$, etc.), diversos tipos de paréntesis, etc. No toda secuencia de símbolos define una propiedad, ella debe ser generada usando ciertas reglas de "sintaxis proposicional" para que la expresión final sea formalmente válida. Una vez que hemos formado una expresión que representa una propiedad (válida desde el punto de vista de la sintaxis utilizada), propiedad que cada objeto matemático puede o no tener, acostumbramos asociarle un conjunto cuyos elementos son precisamente aquellos objetos que la satisfacen. El conjunto así generado pasa a ser en sí mismo un objeto matemático y para todos los efectos es considerado como tal. Por ejemplo, la propiedad "x es un número entero y $x^2 = 1$" que podemos escribir $(x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 = 1)$, define un conjunto A, que en este es simplemete $\{-1, 1\}$. Esta correspondencia entre propiedades y conjuntos, que nos parece tan natural, inspiró a varios matemático de la segunda mitad del siglo XIX para idear un sistema "axiomático–deductivo" que diera una base rigurosa al quehacer de su actividad, cuyos métodos en ocaciones adolecían de serios defectos.

Un ejemplo del gran esfuerzo realizado en este sentido es la obra del matemático alemán **Gottlob Frege**, publicada en dos tomos (1893 / 1903), donde se expone un sistema de fundamentación de la aritmética y el análisis. Sin embargo, en 1902, cuando el segundo tomo de esta monumental obra estaba en prensa, Frege recibió una carta del entonces joven **Bertrand Russell**, donde este último le comunicaba el descubrimiento de una contradicción que sacudía las bases del sistema de Frege. Esta contradicción, conocida como la *paradoja de Russell*, viene de considerar la propiedad $x \notin x$. En efecto, supongamos que a cada propiedad le corresponde un conjunto en el sentido precisado más arriba, y sea entonces $\mathcal{R}$ el conjunto correspondiente a $x \notin x$, i.e. $\mathcal{R} = \{x \mid x \notin x\}$. Tenemos entonces que $\mathcal{R} \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}$, que de acuerdo a la regla de la lógica conocida como la ley del tercero excluido (una proposición puede ser o bien falsa o bien verdadera pero no ambas simultáneamente), nos obliga a admitir que $\mathcal{R}$ no puede ser un conjunto. Aunque la propiedad $x \notin x$ puede parecer algo rebuscada en realidad es muy simple, utiliza una variable, una negación y un $\in$. La paradoja de Russel puso en tela de juicio la validez de todos los conjuntos definidos a partir de una propiedad, pues así como suponer que $\mathcal{R}$ más arriba es un conjunto conduce a una contradicción, nadie podía asegurar que esto no ocurriese con los otros conjuntos hasta entonces considerados.
Concientes de que una de las razones del poder de síntesis y abstracción de las matemáticas reside precisamente en la posibilidad de poder definir coleccciones de objetos a partir de ciertas propiedades, los matemáticos siguieron trabajando para perfeccionar un sistema basado en la noción de conjunto que permitiera dar una justificación rigurosa a las diferentes ramas de su disciplina y que al mismo tiempo no incurriera en las contradicciones del tipo que Russel (y antes Zermelo) había descubierto. El modelo del sistema buscado era una teoría axiomática, lo que consiste en establecer todo conocimiento por deducción lógica a partir de dos tipos de principios: conceptos que no se definen (también llamados "primitivos") y aseveraciones que se admiten como verdaderas sin demostración (conocidas como"axiomas"). Idealmente, los axiomas son proposiciones claras y evidentes que nos dicen como emplear los conceptos primitivos y cómo se relacionan estos entre sí. La primera referencia a la idea de una teoría axiomática procede de **Arist'oteles** ("segundos analíticos") y tradicionalmente se ha visto en los "Elementos" de **Euclides** (publicados alrededor del año 300 A.C., unos 25 años despues de la muerte de Aristóteles) una realización ejemplar de esta idea de axiomatización de una teoría científica. Sin embargo, con toda seguridad los orígenes del método axiomático se remontan aún más, siendo más o menos familiar para los mienbros de la academia de **Platón** y quizás para los Pitagóricos. Cabe señalar que el descubrimiento de los irracionales y de las paradojas de **Zenón** provocaron tal crisis en los matemáticos griegos que la axiomatización de la Geometría de Euclides puede considerarse co-

mo el resultado de la búsqueda de bases sólidas para esta disciplina. Otros ejemplos lo constituye los famosos "Principia" de **Newton** (1686)y el tratamiento de la mecánica analítica publicado en 1788 por **Lagrange**, y en el siglo XIX tenemos los trabajos de **Bolyai**, **Lobachevski**, **Gauss**, **Riemman**, **Peano**, **Hilbert**, entre otros, concernientes al desarrollo de geometrías no Euclidianas. En el caso de la teoría de conjuntos es posible llevar a cabo este tipo de programa de manera bastante satisfactoria mediante "varios" sistemas axiomáticos, cada uno de los cuales posee ciertas ventajas y desventajas con respecto a los demás. Basada en los trabajos de **Cantor**, **Dedekind**, **Peano**, **Frege**, **Zermelo**, **Russell**, **Whitehead**, **Hilbert**, **von Neumann**, **Gödel**, entre varios otros, la axiomatización de la teoría de conjuntos presenta hoy en día una gran madurez y ha de ser considerada como uno de los logros más hermosos de la razón humana.
El objetivo de la primera parte del curso de Análisis es exponer los elementos b'asicos de la teoría axiomática de conjuntos.

1.2 Breve recuerdo de lógica simbólica

La noción más elemental en lógica es aquella de *Proposición*, utilizada para describir un enunciado (secuencia finita de símbolos y caracteres), generado a partir de reglas de sintaxis y que está provisto de un único "valor de verdad": verdadero o falso. Dadas dos proposiciones p y q, se tienen las expresiones:

- negación: $\neg p$ (o tambien $\bar{p}$ o $\sim p$)
- disyunción: $p \vee q$
- conjunción: $p \wedge q$
- implicación: $p \Rightarrow q$
- equivalencia $p \Leftrightarrow q$

Nota: En algunos textos de lógica se distingue dos tipos de implicación: la implicación material $p \to q$, que corresponde exactamente a $p \vee q$, y la implicación formal $p \Rightarrow q$, que significa "$p \to q$ es verdadero" Nosotros no haremos tal distinción.
Una *Función proposicional*; también llamada propiedad, condición o predicado, es una expresión $p(x)$ que se convierte en proposición toda vez que la *Variable* x es sustituida por un valor específico dentro de cierto "dominio discursivo". Junto con los conectores lógicos ya mencionados tenemoslos cuantificadores universal $\forall$ y existencial $\exists$ caracterizados formalmente por unas reglas de sintaxis y operatoria bastante simples. Las expresiones con cuantificadores mas elementales son de la

forma $(\exists x)p(x)$ y $(\forall x)p(x)$ donde $p(x)$ es una función proposicional. Observemos que como regla se tiene que en una función proposicional $p(x)$ la variable debe estar libre (no cuantificada) de modo que pueda ser sustituida por un valor (lo que no ocurre si está). En cuanto a la operatoria recordemos que por ejemplo se tiene $\neg[(\exists x)p(x)] \Leftrightarrow (\forall x)(\neg p)(x)$. En lo referente a la semántica de las expresiones cuantificadas, $(\exists x)p(x)$ se interpreta como que existe al menos un valor de x, digamos a, tal que $p(a)$ es verdadera, mientras que $(\forall x)p(x)$ significa que para todo valor b que pueda tomar $p(b)$ es verdadero.
En términos generales, un *Teorema* es una expresión de la forma "$P \Rightarrow Q$", donde P y Q son proposiciones (tambien puede ser "$P \Leftrightarrow Q$ o simplemente "P es verdadero"). En este caso a P se le suele llamar hipótesis y a Q conclusión. En un sistema formal, una *demostración* de un teorema consiste en una secuencia de enunciados derivados a partir de las hipótesis, teoremas previamente demostrados y de los axiomas, utilizando para ello ciertas reglas de deducción lógica, secuencia que termina con la conclusión. En el caso del *Cálculo Proposicional* podemos considerar los axiomas de **Hilbert Ackermann:**

HA1 $x \vee x \Rightarrow x$

HA2 $x \Rightarrow x \vee y$

HA3 $x \vee y \Rightarrow y \vee x$

HA4 $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \vee x) \vee (z \vee y)]$

junto con las siguientes reglas de deducción:

- Modus Ponens: Si A es un teorema y $A \Rightarrow B$ es un teorema entonces B es un teorema, i.e. $[A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$

- Sustitución: Si A es un teorema donde figura la letra x y si B es una fórmula, la sustitución de x por B en todos los lugares ocupados por x da como resultado un teorema (se escribe "sustitución $B|_x$ en A").

ejemplo: *Teorema del tercero excluido.-* $x \vee (\neg x)$
Demostración:

- sustitución $x|y$ en (HA2): (1) $x \Rightarrow x \vee x$

- sustitución $\neg z|z$ en (HA4): (2) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow [(z \Rightarrow x) \Rightarrow (z \Rightarrow y)]$

- $(x \vee x)|x,\ x|y,\ x|z$ en (2)

$$(3) \quad [(x \vee x) \Rightarrow x] \Rightarrow [(x \Rightarrow (x \vee x)) \Rightarrow (x \Rightarrow x)]$$

- Modus ponens aplicado a (HA1) y (3):

$$(4) \quad [(x \Rightarrow (x \vee x)] \Rightarrow (x \Rightarrow x)$$

- Modus ponens aplicado a (1) y (4): (5) $x \Rightarrow x$
  o de manera equivalente (6) $(\neg x) \vee x$

- Modus ponens aplicado a (6) y (HA3): (7) $x \vee \neg x$

Es posible extender este método formal a situaciones más generales donde se manipulan otros símbolos con el fin de representar otras clases de objetos, siendo entonces necesario enriquecer la lista de axiomas. Una teoría axiomática de este tipo tiene varias ventajas:

1. Proporciona un "punto de partida" claro y preciso.

2. Al ser puramente formal es posible que un mismo sistema axiomático de cabida a diferentes "modelos" dependiendo de la interpretación que se les dé a los términos primitivos, esta independencia de los axiomas con respecto al significado que se les atribuye permite utilizar el mismo sistema en diversas ramas de las matemáticas así como también le proporciona mayor flexibilidad al permitir estudiar qué ocurre cuando uno o más axiomas son alterados para generar nuevos conceptos matemáticos, siendo una herramienta de investigación muy útil.

3. Permite dar implícitamente una definición de los objetos que se quieren manipular, utilizando para ello axiomas que precisan el rol de cada concepto dentro de la teoría.

Junto con estas y otras ventajas, el método axiomático posee también varias desventajas y se le pueden hacer ciertas objeciones. Por ejemplo, su absoluta dependencia de la Lógica que, pese a dar un sentido claro a la exigencia de rigurosidad, eventualmente rigidiza y vuelve algo mecánico el quehacer de la disciplina. Otra objeción es su caracter altamente formal, que al estar basado en términos indefinidos y en axiomas que los involucran, la deducción lógica puede realizarse sin ninguna interpretación en mente, lo que llevado al extremo hace pensar a algunos que la disciplina pierde su sustancia. Esta crítica fue expresada por B. Russell, quien tanto contribuyó a formalizar los principios de las matemáticas, diciendo que "las matemáticas pueden definirse como la disciplina en la cual nunca sabemos sobre qué estamos hablando ni si lo que concluimos es cierto".
Esto alude también a la aceptación de los axiomas como "verdades evidentes", lo que en algunas ocasiones puede ser muy cuestionable

Antes de finalizar esta breve discusión, consideremos dos últimas definiciones. Una teoría se dice *Consistente* si no existen contradicciones dentro de ella, es decir, si *no existe* una proposición P tal que sea posible demostrar P y $\neg P$. Notemos que en una teoría inconsistente toda proposición Q es demostrable. En efecto, supongamos que P y $\neg P$ son teoremas de dicha teoría y sea Q una proposición; afirmamos que Q es también un teorema demostrable (es decir, todo es demostrable!). Veamos primero una demostración "libre" de esto último. Tenemos que $P \Rightarrow P \vee Q$ y, por otra parte,$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$ Así, $P \wedge \neg P \Rightarrow Q$. Ahora una demostración formal:

- Hipótesis:

  1 P

  2 $\neg P$

- (HA2): $\neg P \Rightarrow \neg P \vee Q$ (3)

- Modus ponens aplicado a (2) y (3): $\neg P \vee Q$ o de manera equivalente: (4) $P \Rightarrow Q$

- Modus ponens aplicado a (1) y (4): Q

Vemos las consecuencias desastrozas que paradojas como la de Russell pueden provocar!
Se dice que una teoría axiomática es *Completa* si toda proposición verdadera es demostrable. La consistencia y completitud de las teorías axiomáticas son temas muy interesantes en sí mismo pero que aquí no abordaremos mayormente.
En la próxima sección desarrollaremos una axiomatización de la teoría de conjuntos que sea un modelo de nuestra idea intuitiva de un conjunto como colección de objetos.

1.3 Definición axiomática de conjunto

A partir de esta sección presentaremos un tratamiento axiomático de la *Teoría de Conjuntos* que, si bien no es totalmente formal ni tampoco los axiomas son todos independientes, proporciona un marco de trabajo adecuado, evita todas las paradojas conocidas y, al menos hasta ahora no ha conducido a ninguna contradicción. Nos hemos basado en la presentación de **Dugundji** del sistema de **Von Neumann–Bernays–Gödel**, el cual a su vez está inspirado en trabajos previos, especialmente de **Zermelo** y **Fraenkel.**

Como toda axiomatización existen términos y nociones indefinidos sobre los cuales se basa la teoría. Los axiomas nos dirán cómo emplear tales términos a través de ciertas operaciones. La idea fundamental en la axiomática que hemos escogido es distinguir entre dos tipos de colecciones: las *clases* y los *conjuntos.* Básicamente, una clase es cualquier colección de objetos especificados por una propiedad, mientras que un conjunto es una clase que a su vez puede ser mienbro de otra clase. En otras palabras, un conjunto es una clase que puede ser considerada en sí misma como un elemento o entidad individual. Veremos que tal distinción permite evitar paradojas como la de Russell.
Más precisamente, los términos indefinidos en la axiomática son "clase" y una relación diádica entre clases denotada por "$\in$." Todas las variables $\mathcal{A}, A, x$, etc., representan clases. Dadas dos clases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, el enunciado $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$ o bien es falso o bien verdadero. Una propiedad P será una fórmula construida a partir de los enunciados del tipo "$\mathcal{A} \in \mathcal{B}$" mediante negación, conjunción, disyunción y cuantificación de variables de clase usando las reglas del cálculo proposicional (que supondremos conocidas)

Definición 1.3.1 (Igualdad de clases) *Dos clases son iguales si tienen los mismos miembros*

- $(\mathcal{A} \subset B) \Leftrightarrow (\forall x \mid x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \mathcal{B})$
- $(\mathcal{A} = \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \subset \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \subset \mathcal{A}) \Leftrightarrow (\forall x) x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow x \in \mathcal{B}$

En particular $\mathcal{A} = \mathcal{A}$ es siempre cierto (y de hecho "=" define una relación de equivalencia) como consecuencia tenemos la siguiente propiedad

$$(x \in \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{A} = \mathcal{B}) \Rightarrow (x \in \mathcal{B})$$

que se conoce como sustitución en la relación $x \in \mathcal{A}$ con respecto a la segunda variable. El primer axioma trata de la propiedad de sustitución en $x \in \mathcal{A}$ con respecto a la primera variable

Axioma 1 (De individualidad)

$$(x \in \mathcal{A}) \wedge (x = y) \Rightarrow (y \in \mathcal{A})$$

Definición 1.3.2 (Conjunto) *Una clase A se llama conjunto si existe una clase $\mathcal{A}$ tal que $A \in \mathcal{A}$*

Axioma 2 (De la formación de clases) *Para cada propiedad p en la cual solo aparecen cuantificadas variables de conjuntos y la variable de clase $\mathcal{A}$* no *aparece, existe una clase $\mathcal{A}$ cuyos miembros son sólo aquellos conjuntos que satisfacen la propiedad p, es decir, $(x \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow (x$ es un conjunto$) \wedge p(x))$*

De este modo la clase $\mathcal{A}$ está únicamente determinada por la propiedad que la define.
Notación: $\mathcal{A} = \mathcal{A}(p) = \{x \mid (\text{ es un conjunto}) \wedge p(x)\}$
Observación: Una definición circular del tipo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{x \mid (\text{ es un conjunto}) \wedge (x \in \mathcal{A})\} \\ &= \{x \mid x \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

no está permitida. Sin embargo, si $\mathcal{A}$ es una clase ya definida entonces $\mathcal{A} = \{x \mid x \in \mathcal{A}\}$ es verdadero.
Consideremos ahora la clase de Russell:

$$\mathcal{R} = \{x \mid (x \text{ es un conjunto }) \wedge (x \notin x)\}$$

Si $\mathcal{R}$ fuese un conjunto llegaríamos a una contradicción, de donde se deduce que $\mathcal{R}$ no es un conjunto lo que resuelve la paradoja.
Existen dos clases especiales:

1. la clase universal

   $$\mathcal{U} = \{x \mid (x \text{ es un conjunto }) \wedge (x = x)\},$$

   que satisface $(A$ es un conjunto $) \Leftrightarrow a \in \mathcal{U}$.

2. la clase nula o vacía definida por

   $$\varnothing = \{x \mid (\text{ es un conjunto }) \wedge (x \neq x)\}$$

Proposición 1.3.1 *Para toda clase $\mathcal{A}$, se tiene $\varnothing \subset \mathcal{A}$. Además, $\mathcal{A} \subset \varnothing$ si y sólo si $\mathcal{A} = \varnothing$*

Como consecuencia del Axioma 2, las siguientes operaciones entre clases estan bién definidas y son clases:

Definición 1.3.3 *Utilizaremos las siguientes operaciones entre clases*

- *Unión:* $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \{x \mid (x \in \mathcal{A}) \vee (x \in \mathcal{B})\}$
- *Intersección:* $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{x \mid (x \in \mathcal{A}) \wedge (x \in \mathcal{B})\}$
- *Producto cartesiano: Necesitamos primero la noción de par ordenado (a, b) dados dos conjuntos a y b, de modo tal que*

  $$(a, c) = (c, d) \Leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Esto se logra de la siguiente manera: definimos las clases

$$\begin{aligned} \{a\} &= \{x \mid x = a\} \\ &\textit{y} \\ \{a, b\} &= \{a\} \cup \{b\} = \{x \mid (x = a) \vee (x = b)\} \end{aligned}$$

y luego se define

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{\{a\}, \{a, b\}\} \\ &= \{x \mid (x = a) \vee (x = \{a, b\})\} \end{aligned}$$

Así,

$$\mathcal{A} \times B = \{x \mid (x \textit{ es conjunto }) \wedge (\exists a \in \mathcal{A},\, \exists b \in \mathcal{B} :\, x = (a, b)\ )\}$$

Observación: Similarmente podemos definir la diferencia "$\setminus$" y se tienen las propiedades usuales entre $\times, \cap, \cup, \setminus$

Definición 1.3.4 (Función) *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos clases. Una función $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ es una subclase $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ con la siguiente propiedad:*

$$(\forall x \in \mathcal{A})(\exists! y \in \mathcal{B})\ :\ (x, y) \in f$$

Notación:

- En lugar de $(x, y) \in f$ se suele escribir $y = f(x)$.
- La inclusión $\subset$ a veces se denota por $\subseteq$.

Observemos que las operaciones anteriores están definidas entre clases; en particular, están definidas entre conjuntos. Sin embargo, nada nos asegura que el operar entre conjuntos lo que se obtiene sea a su vez un conjunto. Un punto más esencial aún; ¡los axiomas anteriores no garantizan la existencia de al menos un conjunto!
Observación: Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son clases propias (no son conjuntos) entonces

$$\{\mathcal{A}\} = \{x \mid (x \text{ es conjunto}) \wedge (x = \mathcal{A})\} = \varnothing,$$

lo mismo que $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \varnothing$, de modo que $\{\{\mathcal{A}\}, \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}\}$ no tiene la buena propiedad en este caso para definir el par ordenado. Sin embargo, esto se puede arreglar suponiendo que existen dos conjuntos a y b y definimos $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{A} \times a \cup \mathcal{B} \times b$.
Ejercicio: $(X, Y) = (Z, W) \iff X = Z \wedge Y = W$.

1.4 Existencia y generación de conjuntos

Axioma 3 (del Conjunto Vacío) *$\varnothing$ es un conjunto (¡existen conjuntos!)*

El siguiente grupo de axiomas postulan que ciertas construcciones de conjuntos dan como resultado conjuntos

Axioma 4 (del Par) *Si A y B son conjuntos con $A \neq B$, entonces*

$$\mathcal{A} = \{x \mid (x = A) \vee (x = B)\}$$

es un conjunto (el cual contiene exactamente dos elementos). Se denota por $\{A, B\}$.

Definición 1.4.1 (Familia de Conjuntos) *Sea Λ un conjunto tal que $\Lambda \neq \varnothing$. Una familia de conjuntos indexada por Λ es una función $f\colon \Lambda \to \mathcal{U}$. Se suele escribir A_λ por $f(\lambda)$ y la familia se denota por $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ o bien $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$*

Axioma 5 (de la Unión) *Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos, entonces*

$$\bigcup \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x \mid \exists \lambda \in \Lambda : x \in A_\lambda\}$$

es un conjunto.

Axioma 6 (del Reemplazo) *Si A es un conjunto y si $f\colon A \to \mathcal{A}$ es una función, entonces*

$$f(A) = \{y \mid \exists x \in A : \ y = f(x)\}$$

es un conjunto.

Axioma 7 (del Filtro o Colador) *Si A es un conjunto entonces para toda clase $\mathcal{A}$,*

$$A \cap \mathcal{A} = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in \mathcal{A})\}$$

es un conjunto.

Proposición 1.4.1 *Toda subclase $\mathcal{A} \subset A$ de un conjunto A es un conjunto.(En efecto $\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap A$)*

Proposición 1.4.2 *Si A es un conjunto y p una propiedad entonces*

$$\{x \mid (x \in A) \wedge p(x)\}$$

es un conjunto, el cual denotamos por $\{x \in A \mid p(x)\}$.

Definición 1.4.2 (Clase Potencia) *Dada una clase $\mathcal{A}$, definimos la clase potencia por*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{B} \mid (\mathcal{B} \text{ es un conjunto}) \wedge (\mathcal{B} \subset \mathcal{A})\}$$

Axioma 8 (del Conjunto Potencia) *Si A es un conjunto, $\mathcal{P}(A)$ es también conjunto.*

Veamos algunas consecuencias importantes de estos axiomas:

Proposición 1.4.3 *Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos, entonces*

$$\bigcap\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{x \mid \forall\lambda \in \Lambda\,;\ x \in A_\lambda\}$$

es un conjunto.

Proposición 1.4.4 *Si A es un conjunto entonces $\{A\}$ también lo es.*

Proposición 1.4.5 *Si A y B son conjuntos entonces $A \times B$ también lo es.*

Proposición 1.4.6 *Si A y B son conjuntos entonces la clase de todas las funciones de $A \to B$ es un conjunto*

Proposición 1.4.7 *La clase universal $\mathcal{U}$ de todos los conjuntos* no es un conjunto.

Demostración: Ejercicio (Usar la clase de Russell $\mathcal{R}(p)$).
Para finalizar esta sección, observemos que una fórmula del tipo $(x \in x)$, por muy contraria a nuestra intuición que sea, no está descartada en la axiomática aquí desarrollada. Para eliminarla, uno puede pensar en agregar como axioma: $(\forall x \in \mathcal{U})(x \notin x)$. Sin embargo, hay otros enunciados similares, como por ejemplo $(x \in y) \wedge (y \in x)$, que aunque intuitivamente inaceptables no se ven descartados por este nuevo axioma. Sin embargo, existe un axioma propuesto por Zermelo que si permite eliminar todos los enunciados de este tipo.

Axioma 9 (de Fundación) *Para cada conjunto A con $A \neq \varnothing$, existe $u \in A$ tal que $u \cap A = \varnothing$*

Proposición 1.4.8

- *Si A es un conjunto, entonces $A \notin A$. En particular $\mathcal{R}(p) = \mathcal{U}$.*
- *Si A y B son conjuntos entonces $(A \notin B) \vee (B \notin A)$ (Ejercicio)*

No sacaremos niguna conclusión de este axioma mas allá de los anteriores. Es un axioma que se puede negar y concluir una axiomática consistente.

1.5 El axioma del infinito y los enteros naturales

Históricamente los números naturales aparecieron asociados al *cardinal* de conjuntos finitos, es decir, para “ contar” el número de elementos de una colección finita de objetos. Gracias al axioma 3, disponemos del conjunto vacío $\varnothing$ (“cardinal($\varnothing$)=0”); del axioma 8 (conjunto potencia) tenemos el conjunto $\{\varnothing\}$ que posee exactamente un elemento, a saber $\varnothing$; gracias al axioma 4 (del par), tenemos el conjunto $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, con exactamente dos elementos. Como $\{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ es un conjunto del axioma 5 (de la unión) se deduce que $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ es un conjunto que posee tres elementos. Esto llevo a Von Neumann a proponer que, para dar un fundamento riguroso de los enteros naturales en términos de la Teoría de Conjuntos, una alternativa consiste en identificar los enteros con estos conjuntos;

$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \{\varnothing\} \\
2 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
3 &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

lo que responde de manera satisfactoria con la idea intuitiva de los enteros naturales. Notemos que con este enfoque se tiene que cada entero es igual al conjunto de sus predecesores estrictos, vale decir:0 no tiene predecesores estrictos, lo que corresponde a $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}, \ldots$
Otra forma de escribir lo anterior:

$$0 = \varnothing,\ 1 = 0 \cup \{0\},\ 2 = 1 \cup \{1\},\ 3 = 2 \cup \{2\}, \ldots$$

Intuitivamente, repitiendo indefinidamente este proceso se generan todos los números naturales. Sin embargo no podemos asegurar que existe el conjunto de los números naturales, i.e. el conjunto que contenga todos los enteros naturales así generados. Esto nos obliga a suplir esta falencia con el siguiente axioma.

Axioma 10 (del Infinito) *Existe un conjunto A con las siguientes propiedades.*

1. $\varnothing \in A$
2. *si* $a \in A$ *entonces* $a \cup \{a\} \in A$

Este axioma nos permite formalizar la idea anterior con el objeto de dar una definición rigurosa de los enteros naturales, lo que nos permitirá más adelante definir el cardinal de un conjunto finito y, más aún; dar un fundamento para la aritmética de números aún mas generales.

Definición 1.5.1 (Conjunto de los números enteros naturales.) *Sea A un conjunto cualquiera que satisface las propiedades del Axioma 10 y definamos el conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ mediante*

$$\mathcal{B} = \{B \in \mathcal{P}(A) \mid B \text{ tiene las propiedades (1) y (2) en el Axioma 10}\}.$$

El conjunto de los números naturales está definido por

$$\mathbb{N} = \bigcap_{B \in \mathcal{B}} B$$

Observemos que como $\varnothing \in B$ para todo $B \in \mathcal{B}$, entonces $\varnothing \in \mathbb{N}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \text{si } a \in \mathbb{N} &\Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B})(a \in B) \\ &\Rightarrow (\forall B \in \mathcal{B})(a \cup \{a\} \in B) \\ &\Rightarrow a \cup \{a\} \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Luego $\mathbb{N} \in \mathcal{B}$.

1.6 El axioma de elección

En muchas ocaciones nos interesa considerar subconjuntos generados a partir de un proceso de selección de algún tipo. Para justificar esto sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una *familia finita* de conjuntos no vacios con $A_i \cap A_j = \varnothing$ si $i \neq j$ de modo que cada A_i contiene almenos un elemento a_i. Para cada $i = 1, \ldots, n$ sea la proposici'on $p_i(x) = (x = a_i)$. Entonces

$$\left\{ x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid p_1(x) \vee \ldots \vee p_n(x) \right\}$$

es un conjunto (¡justificarlo!) que contiene exactamente un elemento de cada A_i. Sin embargo, en el caso de familias infinitas de conjuntos este procedimiento ya no es válido. En efecto, si tomamos algo del estilo $p_i(x) := (x = a_i)$ no es posible argumentar como antes pues una cadena infinita de "$\vee$" no es una proposición. Tampoco podemos usar una propiedad del tipo "contiene exactamente un elemento de cada A_i" pues ésta es ilegítima es tanto propiedad lógica
?
porque no determina el conjunto de manera única (las propiedades si lo hacen). Parece entonces necesario asumir:

Axioma 11 (de Elección) *Dada una familia no vacía $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de conjuntos no vacios y disjuntos de a pares ($\lambda \neq \lambda' \Rightarrow A_\lambda \cap A_{\lambda'} = \varnothing$), existe un* conjunto *$S$ que consiste de exactamente un elemento de cada A_λ*

Este axioma es de tipo existencial permite generar conjuntos los cuales, en general, no están únicamente determinados. En 1938 Gödel probó que si la teoría de conjuntos basada en los axiomas 1–10 es consistente entonces la teoría basada en 1–9 también lo es. Más aún, en 1963 Cohen demostró que este axioma es independiente de los primeros.

Definición 1.6.1 *Sea $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos. una función de elección para $\mathcal{A}$ es una función*

$$c\colon \Lambda \to \cup\mathcal{A} \textit{ tal que } \forall\lambda \in \Lambda,\ c(\lambda) \in A_\lambda$$

Teorema 1.6.1 *Son equivalentes*

1. *El axioma de elección.*

2. *Si $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de conjuntos no vacíos entonces $\mathcal{A}$ tiene una función de elección.*

Veamos cómo el axioma de elección nos permite extender de manera natural la noción de producto cartesiano de dos conjuntos al caso de una familia arbitraria de conjuntos. Esta extensi'on se basa en la observación de que los elementos de $A_1 \times A_2$, con A_i conjuntos no vacíos $i = 1, 2$, pueden ser considerados como aquellas funciones $f\colon \{1, 2\} \to A_1 \cup A_2$ tales que $f(i) \in A_i$.

Definición 1.6.2 *Sea $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia de conjuntos. El producto cartesiano $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, también denotado $\prod \mathcal{A}$, es el conjunto de todas las funciones $c\colon \Lambda \to \cup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ que satisfacen $\forall\lambda \in \Lambda$, $c(\lambda) \in A_\lambda$*

Ejercicio: ¿Por qué $\prod \mathcal{A}$ es un conjunto ?
Notación: A veces se utiliza la notación

$$\prod\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}.$$

Un elemento $c \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$se suele escribir $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ o $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ o simplemente $\{a_\lambda\}$ o (a_λ), indicando que $c(\lambda) = a_\lambda$ para cada $\lambda \in \Lambda$. El conjunto A_λ se llama el factor λ–ésimo de $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Para cada $\mu \in \Lambda$, la función $P_\mu\colon \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to A_\mu$ dada por $P_\mu((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = a_\mu$ (o equivalente $P_\mu(c) = c(\mu)$) está bien definido y se llama “proyección sobre el factor μ–ésimo”.

Teorema 1.6.2 *Son quivalentes*

1. *El axioma de elección*

2. *Si* $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia no vacía de conjuntos no vacíos entonces* $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \neq \varnothing$.

Veremos más adelante que el axioma de elección es equivalente a varios otros enunciados "existenciales" y que su aceptación como un axioma válido dentro de la teoría permite dar un alcance más amplio a las consideraciones matemáticas que si se rechazara. Sin embargo, desde la primera vez que una versión del mismo fué utilizada (Zermelo) ha sido objeto de severas objeciones por parte de muchos matemáticos, debido a que escapa a la intuición y no es claro que se pueda decir que se trata de una verdad "evidente" (por muy "razonable" que parezca). Hoy en día en que la teoría axiomática de conjuntos ha alcanzado bastante madurez, parece haber un gran consenso en el sentido de aceptarlo por razones "prácticas".

1.7 Relaciones

Definición 1.7.1 (Relación) *Sean* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *clases. Una relación* $\mathcal{R}$ *entre* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *es una terna* $(\mathcal{A},\mathcal{R},\mathcal{B})$ *con* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}\times\mathcal{B}$.

Se suele denotar $a\mathcal{R}b$ en lugar de $(a,b)\in\mathcal{R}$.
Si $R = (\mathcal{A},\mathcal{R},\mathcal{B})$ es una relación entonces se define el dominio de R y el recorrido o imagen de $\mathcal{R}$ respectivamente por:

$$\begin{aligned}\operatorname{Dom} R &= \{a \mid (\exists b\in\mathcal{B})(a,b)\in\mathcal{R}\}\subseteq\mathcal{A}\\ \operatorname{Rec} R &= \{b \mid (\exists a\in\mathcal{A})(a,b)\in\mathcal{R}\}\subseteq\mathcal{B}\end{aligned}$$

Notemos que una relación $R = (\mathcal{A}, f, \mathcal{B})$ es una *función* ssi

$$(\forall x\in\mathcal{A})(\exists! b\in\mathcal{B}) : (a,b)\in f,$$

en cuyo caso

$$\operatorname{Dom} R = \operatorname{Dom}(f) = \mathcal{A}$$

y

$$\operatorname{Rec} R = \operatorname{Im}(f) = f(\mathcal{A}).$$

Cuando $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ se dice que $R = (\mathcal{A},\mathcal{R},\mathcal{B})$ es una relación binaria y se denota $(\mathcal{A},\mathcal{R})$

Definición 1.7.2 *Una relación binaria* $R = (\mathcal{A},\mathcal{R},\mathcal{B})$ *se dice de* Equivalencia *si*

1. $\forall a\in\mathcal{A}$, $a\mathcal{R}a$ *(reflexividad)*

2. $(\forall a, b \in \mathcal{A})[a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a]$ *(simetría)*

3. $(\forall a, b \in \mathcal{A})[(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)]$ *(transitividad)*

Definimos $[a]_{\mathcal{R}} := \{b \in \mathcal{A} \mid b\mathcal{R}a\}$, que se llama *Clase de Equivalencia* de a, y se tiene:

1. $\cup\{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in \mathcal{A}\} = \mathcal{A}$

2. Si $a\mathcal{R}b$ entonces $[a]_{\mathcal{R}} = [b]_{\mathcal{R}}$

3. Si $a \not\mathcal{R} b$ $((a, b) \in \mathcal{R})$ entonces $[a]_{\mathcal{R}} \cap [b]_{\mathcal{R}} = \varnothing$

Si $\mathcal{A}$ es un conjunto entonces $[a]_{\mathcal{R}}$ también lo es. Mas aún, la clase definida por $\mathcal{A}/\mathcal{R} := \{[a]_{\mathcal{R}} \mid a \in \mathcal{A}\}$ es un conjunto y se llama *Conjunto Cuociente de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{R}$*, y la función $p \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{R}$ definida por $p(a) = [a]_{\mathcal{R}}$ se llama proyecci'on de $\mathcal{A}$ sobre $\mathcal{A}/\mathcal{R}$. Claramente $\mathcal{A}/\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $p(\cdot)$ es sobreyectivo.

Definición 1.7.3 *Una relación binaria $\mathcal{R}$ en una clase $\mathcal{A}$ se llama* Preorden *si es reflexiva y transitiva, i.e. si*

1. $\forall a \in \mathcal{A},\ a\mathcal{R}a$

2. $(\forall a, b \in \mathcal{A})[a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a]$
si además $\mathcal{R}$ es antisimétrica, i.e.

3. $(\forall a, b \in \mathcal{A})[(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c) \Rightarrow (a\mathcal{R}c)]$ *Entonces se dice que es un* Orden *(parcial) y que $\mathcal{A}$ es parcialmente ordenado, si además cada par $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ está relacionado, esto es, $(\forall a, b \in \mathcal{A})(a\mathcal{R}b) \vee (b\mathcal{R}a)$, se dice que el orden es* Total *y que $\mathcal{A}$ es totalmente ordenado.*

Cuando $\mathcal{R}$ es una relación de orden se puede denotar por $\prec$ o $\preccurlyeq$.

Ejemplo: Si dado $\mathcal{A}$ consideramos $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ y lo ordenamos segun la inclusi'on $\subseteq$ i.e.

$$\forall \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}),\ \mathcal{B} \preccurlyeq \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$$

entonces $(\mathcal{P}(\mathcal{A}), \preccurlyeq)$ define un orden parcial en $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.
En una clase parcialmente ordenada $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$ decimos que $m \in \mathcal{A}$ es *Maximal* si

$$(\forall a \in \mathcal{A})[(a \not\preccurlyeq m) \wedge (m \not\preccurlyeq a)] \vee (a \preccurlyeq m)$$

(i.e. a *no* está relacionado con m o bien es “menor” que m), y que $b_0 \in \mathcal{A}$ es una *Cota Superior* de $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ si

$$(\forall b \in \mathcal{B})[(b \not\preccurlyeq b_0) \wedge (b_0 \not\preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq b_0)$$

1.8 Equipotencia y cardinalidad

Definición 1.8.1 *Sean X, Y clases. Decimos que X es equipotente a Y ssi*

$$\exists f : X \to Y$$

biyección. Se anota $X \simeq Y$.

Proposición 1.8.1

- $\forall X \ : \ X \simeq X$
- $(\forall X, Y) \ X \simeq Y \Rightarrow Y \simeq X$
- $(\forall X, y, Z) X \simeq Y \wedge Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$

Observación:

1. Restringiendo $\simeq$ a una clase $\mathcal{A}$ cualquiera (por ejemplo $\mathcal{U}$) resulta que $\simeq$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{A}$.

2. Si X es un conjunto y $X \simeq Y$ entonces Y es conjunto

3. $X \simeq \varnothing \Leftrightarrow X = \varnothing$

4. X se dice "finito" si y sólo si $(\exists n \in \mathbb{N}) X \simeq n$, y ($\neg$"$X$ finito") se anota "X infinito"

5. X se dice "infinito numerable" si $X \simeq \mathbb{N}$

Teorema 1.8.1 (Teorema de Cantor) $\forall X$ *conjunto se tiene que* $X \not\simeq \mathcal{P}(X)$

Definición 1.8.2 *Se dice que una clase Y domina a una clase X si y sólo si $\exists f : X \to Y$ inyectiva. Anotamos $X \preccurlyeq Y$*

Proposición 1.8.2

1. $\forall X, Y$ *clases* $X \subseteq Y \Rightarrow X \preccurlyeq Y$

2. $\forall X, X', Y, Y'$ *clases* $X \simeq X' \wedge Y \simeq Y' \Rightarrow X \preccurlyeq Y \Leftrightarrow X' \preccurlyeq Y'$

Teorema 1.8.2 (Teorema de Schröder–Bernstein) *Sean X, Y conjuntos tales que $X \preccurlyeq Y \wedge Y \preccurlyeq X$. Entonces $X \simeq Y$.*

1.8.1 Propiedades de los conjuntos infinitos

Proposición 1.8.3 *Todo conjunto infinito tiene algún subconjunto numerable.*

Corolario 1.8.1 *Sea X conjunto, entonces:*

1. X *infinito si y sólo si* $\mathbb{N} \preccurlyeq X$
2. X *finito si y sólo si* $X \prec \mathbb{N}$
3. *Si* Y *es numerable,* X *infinito y* $X \subseteq Y \Rightarrow X$ *numerable*
4. X *numerable* $\Leftrightarrow X \preccurlyeq \mathbb{N} \wedge X$ *infinito*
5. X *infinito no numerable* $\Leftrightarrow \mathbb{N} \prec X$
6. X *infinito* $\Leftrightarrow$ *existe* $Y \subsetneq X$ *tal que* $Y \simeq X$

1.9 El lema de Zorn

En muchas ocasiones nos interesa definir un objeto matemático como el elemento "maximal"(o "minimal" según el contexto) de un conjunto ordenado. La dificultad es cómo garantizar la existencia del elemento maximal. Veremos un resultado existencial de este tipo cuyo enunciado es equivalente al axioma de elección y cuya utilización es inevitable en varios casos.
Consideremos un conjunto preordenado $(X, \preccurlyeq)$. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice *Cadena* en X si la relación $\preccurlyeq$ restringida a Y es un orden total, es decir $(Y, \preccurlyeq)$ es un conjunto ordenado tal que todos sus elementos son comparables:

$$(\forall x, y \in Y)(x \preccurlyeq y) \vee (y \preccurlyeq x)$$

Teorema 1.9.1 (Lema de Zorn) *Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto preordenado no vacío tal que toda cadena tiene una cota superior en X. Entonces X tiene un elemento maximal.*

Daremos algunas consecuencias de él para ilustrar su utilización

Teorema 1.9.2 (Tricotomía entre cardinales) *Sean X, Y conjuntos. Entonces una y sólo una de las siguientes propiedades es cierta:*

$$\begin{aligned} |X| &< |Y| \\ |X| &= |Y| \\ |X| &> |Y| \end{aligned}$$

Definición 1.9.1 *Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. X se dice bien ordenado por $\preccurlyeq$ si todo subconjunto no vacío de X tiene un primer elemento (i.e. tiene ínfimo y este pertenece al conjunto).*

Definición 1.9.2 (Suma ordinal) *Sean $(X', \preccurlyeq')$ y $(X'', \preccurlyeq'')$ dos conjuntos bien ordenados y disjuntos $X' \cap X'' \neq \varnothing$ En $X = X' \coprod X''$ definimos*

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \begin{cases} x, y \in X' & \wedge \quad x \preccurlyeq' y \\ & \text{ó} \\ x, y \in X'' & \wedge \quad x \preccurlyeq'' y \\ & \text{ó} \\ x \in X' & \wedge \quad y \in X'' \end{cases}$$

Es f'acil ver que $(X, \preccurlyeq)$ es un conjunto bien ordenado, llamado suma ordinal de $(X', \preccurlyeq')$ y $(X'', \preccurlyeq'')$.

Teorema 1.9.3 (Teorema del buen orden de Zermelo) *Todo conjunto puede ser bien ordenado.*

Observación: Pese a que el teorema de Zermelo asegura que todo conjunto puede ser bien ordenado, no se conoce hasta ahora ninguna construcción específica de un buen orden para algún conjunto no numerable como los números reales por ejemplo.

Teorema 1.9.4 *Los siguientes son equivalentes*

1. *El axioma de elección*
2. *El lema de Zorn*
3. *El teorema de Zermelo*

1.10 Números cardinales

Hemos visto que la relación de equivalencia de equipotencia divide cualquier colección de conjuntos en clases de equivalencia y usaremos el término “número cardinal” para designar una clase de equivalencia. Si X es un conjunto entonces denotamos por $|X| = \{Y \mid Y \simeq X\}$ el correspondiente número cardinal.
Para conjuntos finitos diremos que cualquier conjunto equipotente al conjunto $\{1, \ldots, n\}$ tiene número cardinal n. El vacío tiene número cardinal 0. Los conjuntos numerables (equipotente a $\mathbb{N}$) se dicen tener numero cardinal $\aleph_0$, donde $\aleph$ es la

primera letra del alfabeto hebreo y se llama "Aleph". Esta notación fué introducida por Cantor.

Los conjuntos que son equipotentes al conjunto de los números reales se dicen tener número cardinal c (por "continuo"). Sabemos que podemos ordenar cualquier conjunto de números cardinales al definir $|X| \leq |Y|$ si y sólo si $X' \leq Y'$ para cualquier $X \simeq X' \wedge Y \simeq Y'$. Sabemos que $c > \aleph_0$. De la proposición 1.8.3, que dice que todo conjunto infinito posee un subconjunto numerable, se deduce que $\aleph_0 \leq a$ para todo número cardinal infinito. Claramente, $n < \aleph_0$, donde n es cualquier número cardinal finito.

Definiremos la suma de números cardinales de forma tal que genaralice la suma de números naturales que corresponden a cardinales finitos. Notemos que para $n, m \in \mathbb{N}$, para obtener m+n basta considerar el cardinal $M \cup N$ donde $m = |M|$, $n = |N|$ y $M \cap N = \varnothing$.

Similarmente si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una familia de números cardinales, su suma, que escribimos $\sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$, es el número cardinal del conjunto $\coprod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es cualquier familia de conjuntos disjuntos tales que $a_\lambda = |A_\lambda|$ para todo $\lambda \in \Lambda$.

Esta suma está bien definida pues si $(\forall \lambda \in \Lambda) A'_\lambda \simeq A_\lambda$, entonces $\cup_{\lambda \in \Lambda} A'_\lambda \simeq \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ cuando $\{A'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es otra familia de conjuntos disjuntos. Claramente, esta suma es conmutativa y asociativa. Como los conjuntos $\{1, 3, 5, \dots\}$ y $\{2, 4, 6, \dots\}$ son disjuntos y ambos tienen número cardinal $\aleph_0$, y ademas su unión es $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, vemos que $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. como la unión numerable de conjuntos numerables es numerable tenemos más aún que $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \dots = \aleph_0$. Similarmente, como los conjuntos $[0, 1[$ y $[1, 2[$ en $\mathbb{R}$ son disjuntos y ambos tienen número cardinal c, tenemos $c + c = c$. Más generalmente, $c + c + c + \dots = c$, pues los conjuntos $[n, n+1[$ son todos disjuntos y su unión es $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} = [1, +\infty[$, que también tiene número cardinal c. De estos resultados se deduce que no es posible definir la sustracción de números cardinales, pues no hay inverso para la adición. Por ejemplo, la ecuación $c + x + c$ tiene como soluciones cualquier número cardinal finito n, también $\aleph_0$ y c.

Definiremos ahora la multiplicación de números cardinales generalizando la noción para números cardinales finitos. Notemos que para números cardinales finitos $m, n \in \mathbb{N}$ obtendríamos mn al considerar el cardinal de $M \times N$, donde $|M| = m$ y $|N| = n$.

Similarmente, si a y b son números cardinales, su producto que escribimos ab es el número cardinal de $A \times B$, donde $|A| = a$ y $|B| = b$, lo que está bien definido.

Es fácil ver que el producto de números cardinales es conmutativo, asociativo y distributivo con respecto a la suma. Por supuesto el producto se generaliza para familias arbitrarias $\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de números cardinales:

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda = |\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda|$$

donde $a_\lambda = |A_\lambda|$.

Teorema 1.10.1 *1.* $\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0$

2. $\aleph_0 c = c$

3. $cc = c$

Notemos que no es posible definir la división de números cardinales. En particular la ecuación $cx = c$ tiene como soluciones cualquier número cardinal finito n, como también $\aleph_0$ y c.
La ultima operación aritmétca entre números cardinales que definiremos es la potenciación. Para cardinales finitos m y n, m^n seŕia el producto de n factores iguales a m Así, si a y b son números cardinales entonces definimos

$$a^b = |\prod_{\beta\in B} A_\beta|$$

donde $|A_\beta| = a$ y $|B| = b$.
En particular, podemos tomar $A_\beta \equiv A$ con $|A| = a$. Como por definici'on

$$\prod_{\beta\in B} A_\beta = \{f : B \to A \mid \ f \text{ es funci'on } \}$$

tenemos que a^b es el cardinal del conjunto de todas las funciones de B en A. Se tiene que si a, b y c son números cardinales, entonces

$$a^b a^c = a^{b+c}, \ (a^b)^c = a^{bc} \text{ y } a^c b^c = (ab)^c.$$

Lema 1.10.1 *Si A es un conjunto, entonces $|\mathcal{P}(A)| = 2^A$.*

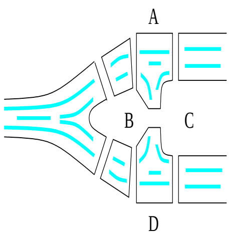
Del teorema de Cantor (Teorema 1.8.1), deducimos entonces que para todo número cardinal $a < 2^a$. De aquí se deduce que la clase de todos los números cardinales **no** es conjunto y que no existe un n'umero cardinal mayor a todos los demas.
Notemos que en particular $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ y que por otra parte $2^{\aleph_0} = c$. La famosa *Hipótesis del Continuo* afirma que *no existe* ningún número cardinal a tal que $\aleph_0 < a < c$. La hipótesis del continuo generalizada afirma que no existe ningún número cardinal comprendido estrictamente entre a y 2^a para cualquier cardinal *infinito* a. En 1940, Gödel demostró que si los axiomas de la teoría de conjuntos son consistentes, entonces podemos agregar la hipótesis del continuo a la teoría y esta seguirá siendo consistente. Más tarde, **P.J. Cohen** demostró que la negación de la hipótesis del continuo también es consistente con los axiomas. Luego se trata de una proposición independiente de la teoría.

Capítulo 2

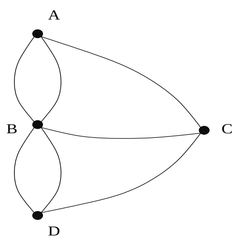
Espacios Topológicos

2.1 Introducción

La topología constituye una de las ramas fundamentales de las matemáticas modernas. Aunque sus orígenes se remontan a la antiguedad, y pese a que actualmente ha alcanzado una notable madurez, es dificíl dar una definición de este campo sin entrar en tecnicismos. Sin embargo como primera aproximación al tema, podemos decir que la *Topología* es el estudio de la *continuidad*. Este comienza con la continuidad del *espacio* y de las formas contenidas en él, sigue con la continuidad de las transformaciones a las que se someten dichas formas como son retorcer, doblar, estirar y deformar, y luego se ocupa de otros tipos de continuidad y de espacio, llevando estas nociones a niveles de generalización cada vez más abstractos.
Desde un comienzo la topología se ha nutrido de dos fuentes: la geometría y el análisis funcional. Por una parte, el topólogo se interesa en aquellas propiedades de las formas en el espacio que no varian frente a transformaciones continuas, propiedades geométricas que son permanentes en algún sentido. Esta linea de estudio surge con el célebre problema de los puentes de Koenigsberg. En dicha ciudad de la antigua Prusia Oriental solían haber 7 puentes sobre el río Pregel, los cuales unian dos islas con el resto de la ciudad, de acuerdo a las siguiente figura:



Desde el siglo XVII se decía que era imposible caminar un circuito cerrado que incluyesen todos los puentes una y sólo una vez cada uno. Durante más de cien años este problema se convirtió en un verdadero desafío pues si bien nadie pudo realizar una tal circuito tampoco nadie podía demostrar que era imposible realizarlo. En 1736, **Leonhard Euler** probó que efectivamente era imposible para lo cual redujo el mapa a una red en la cual las área de terreno se representan mediante puntos y los puentes mediante líneas (o arcos):



Motivado por este problema, Euler descubrió ciertas leyes generales válidas para toda red de este tipo, ésto como parte de su investigación sobre los poliedros. Sus resultados sentaron las primeras bases de lo que podriamos llamar el aspecto combinatorial de la topología, relacionado con el estudio de propiedades invariantes de ciertos tipos de formas geométricas y que son factibles de ser expresadas mediante formulas donde intervienen ciertas cantidades particulares que deben ser calculadas. Este aspecto tuvo un nuevo impulso a fines del siglo XIX en los trabajos de **Poincaré** sobre la teoría de integración en varias variables, dando origen a la topología algebraica. La Topología se fué desarrollando pasando de ser un estudio puramente geométrico sobre las propiedades invariantes de los poliedros para convertirse en un cuerpo de conceptos y métodos aplicables a casi todas las áreas de las matemáticas. La idea de base era representar los elementos de un determinado conjunto como puntos en un cierto espacio, tomando en cuenta la posición relativa de los puntos entre sí. De hecho, uno de los primeros nombres que recibió esta disciplina fue "Analysis situs" (análisis de la posición), debido a **Gauss**(y utilizado anteriormente por **Leibniz**) y que en su momento se relacionó con la representación geométrica de los números complejos como puntos del plano. Pero es **Riemann** quien debe ser considerado como el fundador de la topología como rama de las matemáticas modernas, pues fue el primero en vislumbrar la noci'on de "espacio topológico", en concebir una teoría autónoma de estos espacios, definiendo invariantes y dando aplicaciones al análisis. De hecho, Riemman reconoció que estas ideas "geométricas" podían abstraerse para aplicarse a otras situaciones en que los conjuntos involucrados tuvieran a funciones como elementos, siendo la primera idea de un estudio de espacios funcionales. Para que estos desarrollos madurasen, se requería de una sólida teoría de conjuntos que en particular permitiera describir los números reales, los puntos de una recta, un plano en el espacio, los números irracionales y la teoría de funciones de variable real (diferenciación e integración), utilizando un lenguage común básicamente conjuntista, siendo esto último iniciado por **Cantor** y luego continuado por **Jordan**, **Poincaré**, **Klein**, **Hadamard**, **Borel**, **Baire** , **Lebesgue**. Sobre el aspecto funcional, otros nombres memorables son **Ascoli**, **Hilbert**, **Frechet**, **Riesz**, en el sentido de estudiar las propiedades comunes de puntos y de funciones.

2.2 Definiciones preliminares y ejemplos

Definición 2.2.1 *Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto. Una* Topología *en X es una familia $\mathcal{T}$ de subconjuntos de X que satisfacen las siguientes propiedades.*

1. *Estabilidad bajo uniones arbitrarias: Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ es una familia de miembros de $\mathcal{T}$, entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.*

2. *Estabilidad bajo intersecciones finitas: Si $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$ es una familia* finita *(i.e $|I| < \infty$) de miembros de $\mathcal{T}$, entonces $\cap_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$.*

3. *$\varnothing$ y X pertenecen a $\mathcal{T}$.*

Al par $(X, \mathcal{T})$ se le llama *Espacio Topológico.* También se suele decir que $\mathcal{T}$ es una "estructura topológica sobre X" o bien que $\mathcal{T}$ es la "topología del espacio X." Dado un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, los miembros de $\mathcal{T}$ se llaman *Conjuntos Abiertos* y los elementos de X se llaman *Puntos.*
Observación: Existen varias formas equivalentes de la definición anterior. Por ejemplo es posible reemplazar 2 por " Si $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{T}$". Por otra parte, si admitimos la posibilidad de familias vacías de conjuntos (i.e. $I = \varnothing$), entonces 3 es redundante. En efecto las uniones e intersecciones de familias vacías en X son iguales a $\varnothing$ y X respectivamente.

Ejemplo 2.2.1 *Dado un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$*, tenemos por supuesto que* $\{\varnothing, X\} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$*. Más aún,* $\{\varnothing, X\}$ *es en sí misma una topología en* X*, siendo la "más pequeña" en el sentido de la inclusión, y recibe el nombre de topología* indiscreta *o* grosera*. La topología más grande, i.e. aquella que posee el mayor n'umero de elementos, es* $\mathcal{P}(X)$ *y se llama topología* discreta*. Por ejemplo, si* $X = \{0,1\} = 2$ *entonces la topolog'ia grosera es* $\{\varnothing, \{0,1\}\}$ *mientras que la discreta es* $\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\{0,1\}\}$*; otra topología posible es* $\mathcal{T} = \{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\} = 3$*. El conjunto* $\{0,1\}$ *dotado de esta última topología se conoce como* Espacio de Sierpinski, *el cual reaparecerá más adelante.*

Ejemplo 2.2.2 1. *Sea* $\mathbb{R}$ *el conjunto de los números reales. La topología* Usual *en* $\mathbb{R}$ *se define al llamar abierto a todo conjunto* $U \subseteq \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall x \in U,\ \exists \delta > 0\ :\ ]x-\delta, x+\delta[\subseteq U,$$

donde $]x-\delta, x+\delta[= \{y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \delta\}$*. Verifiquemos que la familia* $\mathcal{T}$ *de todos los subconjuntos* $U \subseteq \mathbb{R}$ *que satisfacen esta propiedad constituyen efectivamente una topolog'ia en* $\mathbb{R}$

(a) *Sea* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{T}$*. Si* $x \in \cup_{i\in I} A_i$ *entonces* $\exists i_0 \in I$ *tal que* $x \in A_{i_0}$*y, por lo tanto,* $\exists \delta_{i_0} > 0$ *tal que* $]x-\delta_{i_0}, x+\delta_{i_0}[\subseteq A_{I_0} \subseteq \cup_{i\in I} A_i$*. luego,* $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$

(b) *Sea* $\{A_i\}_{i=1}^{k} \subseteq \mathcal{T}$*. Si* $x \in \cap_{i=1}^{k} A_i$ *entonces* $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, x \in A_i$ *y , por lo tanto,* $\exists \delta_1, \ldots, \delta_k > 0$ *tal que* $]x-\delta_i, x+\delta_i[\subseteq A_i$*. Definiendo* $\hat{\delta} := \min\limits_{1\le i\le k}\{\delta_i\} > 0$*, tenemos que*

$$\forall i \in \{1, \ldots, k\},\ ]x-\hat{\delta}, x+\hat{\delta}[\subseteq A_i,$$

de aqui se deduce

$$]x-\hat{\delta}, x+\hat{\delta}[\subseteq \cap_{i=1}^{k} A_i.$$

En consecuencia $\cap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{T}$*.*

(c) *Es trivial*

Observemos que todo intervalo abierto $]a,b[$ *con* $a < b$ *es un conjunto abierto para la topología usual de* $\mathbb{R}$*. Por supuesto, esta topología no es igual a la topología discreta (pues por ejemplo* $\{x\}, [a,b], [a,\infty[$ *no son abiertos para esta topología). Notemos también que la propiedad de estabilidad bajo intersecciones en general no es cierta para familias infinitas; para ver esto basta considerar la familia*

$$A_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\text{ con } n > 1, \text{ pues } \cap_{n\in\mathbb{N}}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\} \notin \mathcal{T}.$$

2. *Similarmente, se define la topología usual o* Euclidiana *de* $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, *en base a la noción de bolas abiertas de radio* $r > 0$.

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r\},$$

con $\|\cdot\|$ *una norma en* $\mathbb{R}^n$. *llamamos a un conjunto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *abierto para la topolog'ia Euclidiana si*

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \ : \ B(x, r) \subseteq U.$$

De manera análoga a la topología usual de $\mathbb{R}$, *se verifica que este criterio verifica una topología* $\mathcal{T}$ *de* $\mathbb{R}^n$; *evidentemente, toda bola abierta* $B(x, r)$ *pertenece a* $\mathcal{T}$. *Esta topología no depende de la norma* $\|\cdot\|$ *en* $\mathbb{R}^n$ *escogida, debido a que todas las normas en* $\mathbb{R}^n$ *son equivalentes entre sí. Esto lo veremos con más detalle cuando estudiemos espacios normados.*

Ejemplo 2.2.3 (Espacios Métrico y Normados.) *Llamamos* Espacio Métrico *a un conjunto* E *dotado de una función distancia* [1]

$$d\colon E \times E \to \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

con las siguientes propiedades:

1. *Simetría:* $d(x, y) = d(y, x)$ *para todo* $x, y \in E$
2. *Positividad:* $d(x, y) = 0$ *si y sólo si* $x = y$, *i.e.* $d(x, y) > 0$ *si* $x \neq y$ *y* $d(x, x) = 0$.
3. *Desigualdad triangular:* $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ *para todo* $x, y, z \in E$

Al valor $d(x, y)$ *se le llama "distancia entre* x *e* y*". Una clase importante de espacios métricos es aquella de los* Espacios Vectoriales Normados. *Sea* V *un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales* $\mathbb{R}$, *una* norma *sobre* V *es una función*

$$\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}_+$$

con las siguientes propiedades:

1. $\|v\| = 0$ *si y sólo si* $v = 0$, *i.e.,* $\|v\| > 0$ *si* $v \neq 0$ *y* $\|0\| = 0$.
2. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *para todo* $v, w \in V$.

[1] Tambien se le llama a d "métrica" en E.

3. $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ *para todo* $(\lambda, v) \in \mathbb{R} \times V$.

Un espacio vectorial V *dotado de una norma* $\|\cdot\|$ *se llama* "espacio vectorial normado", *en cuyo caso, la función* $d(x,y) = \|x - y\|$ *con* $x, y \in V$ *define una distancia o métrica en* V. *Por comodidad, denotamos por* (E, d) *y* $(V, \|\cdot\|)$ *un espacio métrico y un espacio vectorial normado respectivamente.*
Asociamos a cada métrica d *en un conjunto* E *una topología* $\mathcal{T}(d)$ *en* E *de la siguiente manera: dados* $x \in E$ *y* $r > 0$, *llamamos d–bola abierta de centro* x *y radio* $r > 0$ *al conjunto* $B_d(x,r) = \{y \in E \mid d(y,x) < r\}$, *y decimos que un subconjunto* $U \subseteq E$ *es abierto, i.e.* $U \in \mathcal{T}(d)$,*si* $\forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B_d(x,r) \subseteq U$. *similarmente al caso de* $\mathbb{R}$ *con la topología usual, se verifica que* $(E, \mathcal{T}(d))$ *es un espacio topológico.*
Ejemplos:

1. $\mathbb{R}^n, n \geq 1$, *dotado de alguna de las métricas definidas por las normas siguientes*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},\ 1 \leq p < \infty; \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n}\{|x_i|\}.$$

La topología inducida en este caso es la usual (topología Euclidiana).

2. *Sea* $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid\ f \text{ es función}\}$ *el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en* $[0,1]$ *y a valores reales (la suma y la ponderación por escalar se definen de manera usual). Entonces la función*

$$d(f,g) := \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)|$$

es una métrica sobre $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ *inducida por la norma*

$$\|f\|_\infty := \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|.$$

3. *Sea* $X \neq \varnothing$ *un conjunto. Verificar que la función*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

es una métrica sobre X *¿Cuál es la topología inducida por* d*?*

4. *Sea*

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}.$$

Es fácil verificar que

$$d(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}) := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}(x_n - y_n)^2}$$

define una métrica en $\ell^2(\mathbb{N})$ y por lo tanto induce una topología en este conjunto. ¿Es posible dotar a $\ell^2(\mathbb{N})$ de una estructura de espacio vectorial y de una norma $\|\cdot\|$ de modo tal que la topología del espacio vectorial normado resultante coincida con la topología inducida por la métrica anterior?

Los ejemplos anteriores muestran que un conjunto X puede tener muchas topologías, cada una de las cuales determinando un espacio topológico diferente. Mirando cada topología como un subconjunto de $\mathcal{P}(X)$, las topologías en X están parcialmente ordenadas por inclusión. Decimos que una topología $\mathcal{T}_1$ es más grande, o con más abiertos, o "más fina" que una topología $\mathcal{T}_0$ cuando $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_1$. Más aún, es fácil verificar que si $\{\mathcal{T}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia cualquiera de topologías en X entonces $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$ es también una topología en X (sin embargo $\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$ no siempre resulta ser una topología). Claramente, si $\mathcal{T}_0$ es una topología tal que $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$ entonces $\mathcal{T}_0 \subseteq \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$, y por lo tanto $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$ es la topolog'ia *m'as fina* de todas las topologías $\mathcal{T}$ contenidas simultáneamente en todos los mienbros de la familia $\{\mathcal{T}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.
En la práctica, para introducir una topología en un conjunto $X \neq \varnothing$ se comienza por considerar una noción de "cercanía", la cual se representa por una familia de conjuntos $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ a partir de la cual se genera una topología que contiene a la familia $\mathcal{A}$ y que es la más pequeña con esta propiedad. Este procedimiento es válido para cualquier familia inicial $\mathcal{A}$, como lo establece el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1 *Dada cualquier familia $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ de subconjuntos de $X \neq \varnothing$, siempre existe una única topología más pequeña que la contiene, denotada por $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. Esta topología puede describirse de manera equivalente como:*

1. *$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \cap\{\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{T}$ es topología en X y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}\}$*

2. *$\mathcal{T}(\mathcal{A})$ consiste únicamente de: $\varnothing$, X, todas las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{A}$ y todas las uniones arbitrarias de estas intersecciones finitas.*

A la familia $\mathcal{A}$ se le llama subbase *para $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, y $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ se dice "topología generada por $\mathcal{A}$"*

Ejemplo 2.2.4 *En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, sea $\mathcal{A}_1$ la familia de todos los intervalos semi–abiertos infinitos $]a, \infty[= \{x \mid x > a\}$ y $]-\infty, b[= \{x \mid x < b\}$.*

Como $]a, b[=]a, \infty[\cap]-\infty, b[$ *para todo* $a < b$, *la topología* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)$ *generada por* $\mathcal{A}_1$ *contiene todos los intervalos abiertos; en particular toda unión de intervalos abiertos es un abierto para esta topología. Sea* $U \subseteq \mathbb{R}$ *un abierto para la topología usual de* $\mathbb{R}$, *entonces* $\forall x \in U, \exists \delta_x > 0$ *tal que* $\{x\} \subseteq]x - \delta_x, x + \delta_x[\subseteq U$, *y por lo tanto*

$$U = \bigcup_{x \in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U}]x - \delta_x, x + \delta_x[\subseteq U$$

Así, U *es unión de intervalos abiertos, por lo que pertenece a* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)$. *Esto prueba que* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)$ *contiene la topología usual de* $\mathbb{R}$. *Recíprocamente, los abiertos de* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)$ *son precisamente las uniones de intervalos abiertos y por lo tanto son abiertos para la topología usual. Luego* $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)$ *es la topología usual de* $\mathbb{R}$, *es decir,* $\mathcal{A}_1$ *es una subbase para la topología usual de* $\mathbb{R}$. *Observemos que de paso hemos probado que la familia* $\mathcal{A}_2 = \{]a, b[\mid a < b\}$ *también genera la topología usual de* $\mathbb{R}$.

La construcción de una topología a partir de una subbase $\mathcal{A} = \{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ pierde algo de control sobre los conjuntos abiertos que se generan pues estos últimos se construyen usando intersecciones finitas de $\mathcal{A}_\lambda$'s en lugar de los $\mathcal{A}_\lambda$'s en sí mismos. Sin embargo, en algunos casos es posible generar la topología a partir de los $\mathcal{A}_\lambda$'s directamente, utilizando sólo uniones de $\mathcal{A}_\lambda$'s. En el ejemplo anterior, si utilizamos como familia generadora $\mathcal{A}_2 = \{]a, b[\mid a < b\}$ entonces se tiene que $\mathcal{T}(\mathcal{A}_2)$ es la topología usual de $\mathbb{R}$, donde cada abierto se obtiene a partir de *uniones* de intervalos abiertos finitos. Esta forma de construir los abiertos es más conveniente pues sólo requiere uniones, pero para que sea posible se necesita que la familia generadora inicial satisfaga ciertas propiedades. El objetivo de la siguiente sección es estudiar esta situación con m'as profundidad, de modo tal que el proceso de dotar a un conjunto de una topología esté bien caracterizado.

2.3 Bases de abiertos

Dado un espacio métrico (X, d) es fácil ver que si $\mathcal{T}(d)$ es la topología inducida por d entonces $A \in \mathcal{T}(d) \Leftrightarrow$ existe una familia de bolas abiertas $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ tal que $A = \cup_{i \in I} B_d(x_i, r_i)$. En efecto la implicancia $(\Leftarrow)$ es inmediata gracias a la propiedad de estabilidad bajo uniones arbitrarias de miembros de la topología. Para probar $(\Rightarrow)$ recordemos que si A es abierto para $\mathcal{T}(d)$ entonces $\forall x \in A, \exists r_x > 0 \ : \ B_d(x, r_x) \subseteq A$ luego $A = \cup_{x \in A} \subseteq \cup_{x \in A} B_d(x, r_x) \subseteq A$, y por lo tanto $A = \cup_{x \in A} B_d(x, r_x)$. Esto significa que las bolas abiertas son suficientes para generar todos los conjuntos abiertos para la topología $\mathcal{T}(d)$, lo que motiva la siguiente definición.

Definición 2.3.1 (Base.) *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico. Una familia $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ se dirá una* Base *para $\mathcal{T}$ si cada conjunto abierto es una unión de miembros de $\mathcal{B}$ i.e.*

$$\forall U\in\mathcal{T},\exists\{B_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{B} \text{ tal que } U=\bigcup_{i\in I}B_i.$$

De este modo $\mathcal{T}=\{\bigcup_{i\in I}B_i$ donde $\{B_i\}_{i\in I}\}$ es una familia arbitraria de conjuntos en $\mathcal{B}$.

Ejemplo 2.3.1
- *$\mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$*
- *Sea $\mathcal{D}$ la topología discreta en X. Entonces $\mathcal{B}=\{\{x\}\mid x\in X\}$ es la base más pequeña para $\mathcal{D}$. en efecto, si $\mathcal{B}'$ es una base para $\mathcal{D}=\mathcal{P}(X)$ entonces dado $x\in X$, $\{x\}=\cup_{i\in I}B_i$ para alguna familia $\{B_i\}_{i\in I}\subseteq\mathcal{B}'$, y por lo tanto $\exists i\in I\colon B_i=\{x\}$. Así, $\forall x\in X,\{x\}\in\mathcal{B}'$ y , en consecuencia, $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{B}'$. Por otra parte, $\forall U\in\mathcal{P}(X)$ se tiene que $U=\cup_{x\in U}\{x\}$, de modo que $\mathcal{D}$ es una base para $\mathcal{P}(X)$.*
- *Dado un espacio métrico (X,d) se tiene que*

  $$\mathcal{B}=\{B_d(x,r)\mid x\in X \text{ y } r>0\}$$

  es una base para $\mathcal{T}(d)$. en particular, la topología usual de $\mathbb{R}$ tiene como una posible base (no es la única, por supuesto) la familia de intervalos abiertos

  $$\mathcal{B}=\{]x-\delta,x+\delta[\mid x\in\mathbb{R} \text{ y } \delta>0\}=\{]a,b[\mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

Las familias de una topología que le sirven como base están caracterizadas mediante el siguiente resultado.

Teorema 2.3.1 *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$. Son equivalentes*

1. *$\mathcal{B}$ es una base para $\mathcal{T}$*
2. *$(\forall U\in\mathcal{T})(\forall x\in U)(\exists B\in\mathcal{B})(x\in B\subseteq U)$*

Ejemplo 2.3.2 *$\mathbb{R}^n$ con la topología usual admite una* base numerable.
Sea $U\subseteq R^n$ un abierto y sea $x\in U$; existe entonces $r>0$ tal que $B(x,r)\subseteq U$. Podemos asumir que $r\in\mathbb{Q}$. Por otra parte, es facil verificar que existe $\xi_x\in\mathbb{Q}^n$ tal que $\|x-\xi_x\|\leq r/3$. Como $\|y-x\|\leq\|y-\xi_x\|+\|\xi_x-x\|\leq\|y-\xi_x\|+r/3$, se tiene que $x\in B(\xi_x,r/2)\subseteq B(x,r)\subseteq U$
Así, $\mathcal{B}=\{B(\xi,r)\mid\xi\in\mathbb{Q}^n$ y $r>0$ con $r\in\mathbb{Q}\}$ es una base numerable para la topología usual de $\mathbb{R}^n$. en particular

- *todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es la unión de a lo más una cantidad numerable de bolas abiertas.*
- *si $\mathcal{T}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^n$, entonces $|\mathcal{T}| = 2^{\aleph_0}$*

Teorema 2.3.2 *Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ un a base para $\mathcal{T}$. Entonces un conjunto A es abierto si y sólo si para cada $x \in A$ existe $U \in B$ con $x \in U \subseteq A$*

Este resultado proporciona una forma muy conveniente de verificar si un conjunto dado constituye un abierto. Como $\mathcal{T}$ es una base para $\mathcal{T}$, entonces podemos aplicar este criterio tomando $\mathcal{B} = \mathcal{T}$, lo que suele ser útil en la práctica.

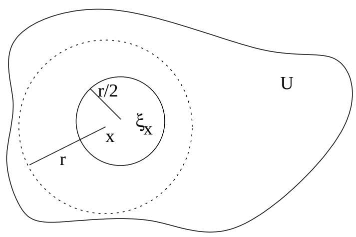
Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X y consideremos la topolog'ia generada por $\mathcal{A}$, denotada $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ (ver teorema 2.2.1). Es decir, $\mathcal{A}$ es por definici'on una subbase para $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. como ya hemos mencionado, el principal inconveniente es tener que considerar intersecciones finitas de elementos en $\mathcal{A}$, lo que implica la caracterización de los conjuntos abiertos. Sin embargo, en ciertos casos ocurre que la familia inicial $\mathcal{A}$ *sí* es una base de $\mathcal{T}(\mathcal{A})$. A modo de ilustración, la familia

$$\mathcal{A}_1 = \{]-\infty, b[|\ b \in \mathbb{R}\} \cup \{]a, \infty[|\ a \in \mathbb{R}\}$$

es una subbase para la topología usual de $\mathbb{R}$ pero no es una base para esta topología, mientras que la familia $\mathcal{A}_2 = \{]a, b[|\ a < b\}$ resulta ser una base para la misma topología. Nos gustaría tener un criterio que nos permitiera saber a priori cuando una familia de conjuntos es base de la topología que genera. En virtud del teorema 2.3.2, tenemos que dada una base $\mathcal{B}$ de una topología $\mathcal{T}$ entonces para todo $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y para todo $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. Esta propiedad necesaria es en realidad suficiente, como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 2.3.3 *Sean $X \neq \varnothing$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos que satisface la siguiente propiedad:*

(2.1) $$(\forall U_1, U_2 \in \mathcal{A})(\forall x \in U_1 \cap U_2)(\exists U \in \mathcal{A})(x \in U \subseteq U_1 \cap U_2)$$



Entonces $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{\varnothing\} \cup \{X\}$ *es una base para la topología generada por* $\mathcal{A}$ *, que denotaremos* $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ *y que es la topología más pequeña que contiene a* $\mathcal{A}$.

Para especificar una topología a partir de una base se suele comenzar por definir para cada $x \in X$ una familia distinta de $\varnothing$, $\{U_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda(x)\}$ con $x \in U_\lambda(x)$ para todo $\lambda \in \Lambda(x)$ (llamada "base en x") y luego se verifica que la familia $\mathcal{B} = \{U_\lambda(x) \mid \lambda \in \Lambda(x), x \in X\}$ satisface (2.1). En este caso, como $x \in U_\lambda(x)$ se tiene que el conjunto X puede escribirse como una unión de miembros de $\mathcal{B}$. Si además admitimos la posibilidad de uniones vacías, entonces $\varnothing$ también se obtiene como una unión. De este modo, y en virtud del teorema anterior, la familia $\mathcal{B}$ resulta ser, ella misma, una base para la topología que genera: $\mathcal{T}(\mathcal{B})$.

Ejemplo 2.3.3 *Sea* $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f$ *es continua*$\}$. *Para cada* $f \in \mathcal{C}$ *y* $\varepsilon > 0$, *definamos*

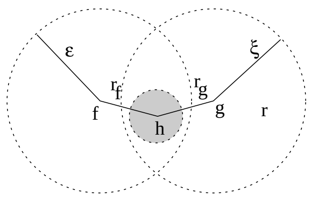
$$M(f,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt < \varepsilon\}$$

La familia $\{M(f,\varepsilon) \ : \ f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})\}$ *es una base para una topología* $\mathcal{M}$ *en* $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. *En efecto, si* $h \in M(f,\varepsilon) \cap M(g,\xi)$ *sean*

$$r_f := \int_0^1 |f(t) - h(t)|dt$$

y

$$r_g := \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$



y sea $\delta = \min\{\varepsilon - r_f, \eta - r_g\}$; *entonces* $\delta > 0$ *(por qué?) y* $M(h,\delta) \subseteq M(f,\varepsilon) \cap M(g,\eta)$ *pues*

$$\begin{aligned} \varphi \in M(h,\delta) \Rightarrow \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 |f(t) - h(t)|dt + \int_0^1 |h(t) - \varphi(t)|dt \\ &< r_g + \delta \leq r_f + (\varepsilon - r_f) = \varepsilon \end{aligned}$$

as'i $\varphi \in M(f,\varepsilon)$, y similarmente, $\varphi \in M(g,\eta)$.
Podemos definir otra topología $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ al usar como base la familia de conjuntos $\{U(f,\varepsilon) \mid f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}),\ \varepsilon > 0\}$ donde

$$U(f,\varepsilon) := \{g \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| < \varepsilon\}$$

(¡Verificar!)

Aunque cada base en X genera una única topología, distintas bases pueden dar origen a una misma topología. Estudiemos cuando esto ocurre.

Definición 2.3.2 (Bases Equivalentes) *Dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en X se dicen* Equivalentes *si $\mathcal{T}(\mathcal{B}) = \mathcal{T}(\mathcal{B}')$*

Teorema 2.3.4 *Dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ en X son equivalentes si y sólo si se tienen las siguientes dos condiciones:*

1. $(\forall U \in \mathcal{B})(\forall x \in U)(\exists U' \in \mathcal{B}')x \in U' \subseteq U$.
2. $(\forall U' \in \mathcal{B}')(\forall x \in U')(\exists U \in \mathcal{B})x \in U \subseteq U'$.

Si s'olo se tiene (1) entonces $\mathcal{T}(\mathcal{B}) \subsetneq \mathcal{T}(\mathcal{B}')$, esto es, $\mathcal{T}(\mathcal{B})$ es un subconjunto propio de $\mathcal{T}(\mathcal{B}')$

Ejemplo 2.3.4 *Es posible demostrar que en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes, es decir, se tiene que si $N_1 \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ y $N_2 \colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty[$ son dos normas entonces existen dos constantes $c_1, c_2 > 0$ tales que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ c_1 N_1(x) \le N_2(x) \le c_2 N_1(x)$$

Veremos una demostración de este resultado cuando estudiemos con más profundidad los espacios normados; por ahora, aceptemoslo como cierto (†) De acuerdo al ejemplo (2.2.3), para dotar a $\mathbb{R}^n$ de una topología podemos utilizar como base las siguientes familias de bolas abiertas

$$\mathcal{B}_1 = \{B_1(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

o

$$\mathcal{B}_2 = \{B_2(x,r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

donde

$$B_1(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid N_1(y - x) < r\}$$

y

$$B_2(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid N_2(y-x) < r\}.$$

En virtud de la equivalencia de las normas, se tiene que ambas bases determinan la misma topología. En efecto, dado $r > 0$ se tiene que $B_2(x, c_1 r) \subseteq B_1(x,r) \subseteq B_2(x, c_2 r)$ y del teorema (2.3.4) se deduce que $\mathcal{T}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{B}_2)$. Como en particualr podemos tomar

$$N_1(x) = \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

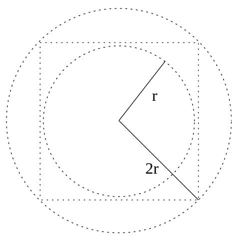
la norma Euclidiana, deducimos que todas las normas en $\mathbb{R}^n$ inducen la misma topología, llamada topología Euclidiana.
$(\dagger)$ A modo de ilustraci'on, consideremos la norma Euclideana $\|\cdot\|_2$ y la norma infinito

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Evidentemente,

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

y se tiene que toda "caja abierta" en $\mathbb{R}^n$ para la norma infinito contiene una "bola abierta" y est'a contenido en una.



Una situación diferente ocurre en dimensión infinita, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3.5 *Las topologías $\mathcal{M}$ y $\mathcal{U}$ en $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$* no son iguales*: se tiene que $\mathcal{M} \subsetneq \mathcal{U}$, i.e., $\mathcal{U}$ estrictamente más fina que $\mathcal{M}$ (ver ejemplo (**??**) para las* *definiciones de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{U}$). En efecto, sea $\varphi \in M(f, \varepsilon)$ y definimos $r := \int_0^1 |f(t) - \varphi(t)|dt$, si $g \in U(\varphi, \varepsilon - r)$ se tiene que*

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(t) - f(t)|dt &\leq \int_0^1 |g(t) - \varphi(t)|dt + \int_0^1 |\varphi(t) - f(t)|dt \\ &\leq \int_0^1 (\varepsilon - r)dt + r = \varepsilon - r + r = \varepsilon \end{aligned}$$

así que $U(\varphi, \varepsilon - r) \subseteq M(f, \varepsilon)$, lo que demuestra que $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{U}$ gracias al teorema (2.3.4). Por otra parte consideremos la función nula $0(t) = 0$. y sea $\{f_n\} \in \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ la familia de funciones $f_n(t) = t^n$; tenemos que

$$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - 0(t)| = \sup_{t \in [0,1]} |t^n| = 1.$$

y ademas

$$\int_0^1 |f_n(t) - 0(t)|dt = \frac{1}{n+1}.$$

Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ a partir de cierto $N = N(\varepsilon)$ se tiene que $f_n \in M(0, \varepsilon)$ $\forall n \geq N$, pero $f_n \notin U(0, 1)$ lo que prueba que no existe $\varepsilon > 0$ *tal que $M(0, \varepsilon) \subseteq U(0, 1)$. Así, la condición (2) del teorema (2.3.4) no se tiene.*

2.4 Bases de vecindades

Otra forma de dotar a un conjunto $X \neq \varnothing$ de una estructura topológica proviene de la noción de vecindad

Definición 2.4.1 (Vecindad) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, Sea $x \in X$. Un conjunto $N \in \mathcal{P}(X)$ se dice vecindad de x si existe un abierto $U \in \mathcal{T}$ tal que $x \in U \subseteq N$*

Hay que tener cuidado con el término “vecindad”, pues uno podría pensar erróneamente que para que un subconjuto de X sea vecindad de un punto es necesario que sea pequeño de modo tal que sus elementos estén muy próximos entre sí. Sin embargo, la definición anterior nos dice que en realidad para que un subconjunto sea vecindad de un punto se requiere que sea lo suficientemente “grande” como para contener un abierto que a su vez tiene al punto como uno de sus elementos. En particular, como $X \in \mathcal{T}$, se tiene que X es vecindad de todos sus elementos. Por otra parte, si $x \in R^n$ entonces $\{x\}$ no es vecindad de x si utilizamos la topología usual (imposible que $\{x\}$ contenga una bola abierta) mientras que sí lo es si consideramos la topología discreta.

Proposición 2.4.1 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces, $V \in \mathcal{T}$ si y s'olo si V es vecindad de todos sus puntos.*

Dado $x \in X$, anotemos por $\mathcal{N}_x$ al conjunto de vecindades de x, i.e.

$$\mathcal{N}_x := \{N \subseteq X \mid (\exists U \in \mathcal{T})x \in U \subseteq N\},$$

el cual satisface las siguientes propiedades (cuya demostración queda como ejercicio):

N0 $X \in \mathcal{N}_x$

N1 $(\forall N \in \mathcal{N}_x)x \in N$

N2 $(\forall N_1, N_2 \in \mathcal{N}_x)N_1 \cap N_2 \in \mathcal{N}_x$

N3 $(\forall N \in \mathcal{N}_x)N \subseteq N' \Rightarrow N' \in \mathcal{N}_x$

N4 $(\forall N \in \mathcal{N}_x)(\exists N' \in \mathcal{N}_x)N' \subseteq N \wedge (\forall y \in N')N' \in \mathcal{N}_y$ (Toda vecindad de x contiene una vecindad de x que es, a su vez, vecindad de todos sus puntos)

Lo interesante de estas propiedades es que caracterizan las vecindades de una topología

Proposición 2.4.2 *Sea $X \neq \varnothing$ y $(\mathcal{N}_x)_{x \in X}$ una familia de subconjuntos de $\mathcal{P}(X)$ que satisface para cada $x \in X$,* N0, N1, ..., N4. *Entonces, existe una única topología $\mathcal{T}$ sobre X tal que $\forall x \in X$, $\mathcal{N}_x$ es el conjunto de vecindades de x en $(X, \mathcal{T})$*

Definición 2.4.2 (Base de Vecindades) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $x \in X$. Un conjunto $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{N}_x$ se dice* Base de Vecindades *de x o* Sistema Fundamental de Vecindades *de x si* $(\forall N \in \mathcal{N}_x)(\exists N' \in \mathcal{B}_x)N' \subseteq N$

Notemos que si $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades de x entonces se tiene:

BN1 $(\forall N \in \mathcal{B}_x)x \in N$

BN2 $(\forall N_1, N_2 \in \mathcal{B}_x)(\exists N \in \mathcal{B}_x)N \subseteq N_1 \cap N_2$

BN3 $(\forall N \in \mathcal{B}_x)(\exists \hat{N} \in \mathcal{B}_x)(\forall \hat{x} \in \hat{N})(\exists N' \in \mathcal{B}_{\hat{x}})N' \subseteq N$

Ejemplo 2.4.1 *En $\mathbb{R}$ con la topología usual. Si $x \in \mathbb{R}$ entonces*

- $\mathcal{B}_x = \{]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\mid \varepsilon > 0\}$
- $\mathcal{B}'_x = \{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

- $\mathcal{B}''_x = \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$

son todas bases de vecindades de x

Proposición 2.4.3 *Dada una familia no vacía* $(\mathcal{B}_x)_{x\in X}$ *de subconjuntos de* $\mathcal{P}(X)$ *que satisface para cada* $x \in X$, BN1,BN2 y BN3 , *existe una única topología* $\mathcal{T}$ *en* X *tal que* $(\forall x \in X), \mathcal{B}_x$ *es base de vecindades de* x

2.5 Operaciones topológicas elementales

Consideremos el espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el cual permanecerá fijo a travez de esta sección excepto en los ejemplos.

Definición 2.5.1 (Interior) *Sea* $A \subseteq X$. *El* interior $\mathrm{Int}(A)$ *de* A *es el conjunto abierto mas grande contenido por* A*; esto es,*

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup \{V \mid (V \textit{ es abierto }) \wedge (V \subseteq A)\}.$$

Tambien se suele anotar por $\overset{\circ}{A}$

Ejemplo 2.5.1

- *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual:*
  - $\mathrm{Int}(]0,1[) =]0,1[$
  - $\mathrm{Int}(]0,1]) =]0,1[$
  - $\mathrm{Int}(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}) = \varnothing$
- *En el espacio de Sierpinski (2.2.1)*
  - $\mathrm{Int}(\{0\}) = \{0\}$
  - $\mathrm{Int}(\{1\}) = \varnothing$
- *En* $\mathbb{R}^2$ *con la topología usual:*
  - $\mathrm{Int}([0,1]^2) =]0,1[^2$
  - $\mathrm{Int}(\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}) = \varnothing$

Propiedades:

1. A es abierto $\Leftrightarrow A = \mathrm{Int}(A)$
2. $x \in \mathrm{Int}(A) \Leftrightarrow (\exists N \in \mathcal{N}_x) N \subseteq A$

3. $\mathrm{Int}(\mathrm{Int}(A)) = \mathrm{Int}(A)$

4. $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$

5. $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B)$

6. $\mathrm{Int}(A \cup B) \supseteq \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B)$

Definición 2.5.2 (Conjunto Cerrado) *Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice* Cerrado *si $A^c = X \setminus A$ es un abierto.*

Ejemplo 2.5.2

- *En $\mathbb{R}$ con la topología usual $[a,b]$ es cerrado, en conformidad con la terminología habitual. Similarmente $]-\infty, b]$ y $[a, \infty[$ son cerrados, también lo son $\{x_0\}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\mathbb{N}$*

- *En general los conceptos de conjunto "abierto" y "cerrado" no son exclusivos ni exhaustivos: en todo espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, $\varnothing$ y X son abiertos y cerrados, mientras que en $\mathbb{R}$, $[0,1[$ no es ni abierto ni cerrado. Similarmente, en $(X, \mathcal{P}(X))$ todo conjunto es abierto y cerrado, y en $(X, \{\varnothing, X\})$ los singletons $\{x\}$ con $x \in X$ no son ni abiertos ni cerrados si $|X| > 1$.*

- *En $\mathbb{R}^2$ con la topología usual $\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}$ no es ni abierto ni cerrado; sin embargo $\{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$ es cerrado (¡verificarlo!)*

Propiedades:

1. Estabilidad bajo intersecciones arbitrarias: si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de cerrados entonces $\cap_{i \in I} F_i$ es cerrado.

2. Estabilidad bajo uniones finitas: si $\{F_i\}_{i \in I}$ es una familia finita de cerrados entonces $\cup_{i \in I} F_i$ es cerrado.

3. $\varnothing$ y X son cerrados.

Definición 2.5.3 (Adherencia) *Sea $A \subseteq X$. La* adherencia *$\overline{A}$ de A es el conjunto cerrado más pequeño que contiene a A, ésto es,*

$$\overline{A} = \{F \mid (F \textit{ es cerrado }) \wedge (F \supseteq A)\}.$$

También se suele anotar por $\mathrm{Adh}(A)$.

Ejemplo 2.5.3

- *En $\mathbb{R}$ con la topología usual,*
  - $\overline{]0,1[} = [0,1]$

- $\overline{]0,1]} = [0,1]$
- $\overline{\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}} = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}$

• *En el espacio de Sierpinski*

- $\overline{\{0\}} = \{0,1\}$
- $\overline{\{1\}} = \{1\}$

• *En $\mathbb{R}^2$ con la topolog'ia usual*

$$\overline{\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}} = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Propiedades

1. $A \subseteq \overline{A}$
2. A es cerrado $\Leftrightarrow A = \overline{A}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$
4. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
7. $\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c$; $\mathrm{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$
8. $\overline{A} = \{x \in X \mid (\forall N \in \mathcal{N}_x) N \cap A \neq \varnothing\}$

Definición 2.5.4 (Frontera) *Sea $A \subseteq X$. La frontera $\mathrm{Fr}(A)$ de A es $\overline{A} \cap \overline{A^c}$*

Ejemplo 2.5.4 • *En $\mathbb{R}$ con la topología usual,*

- $\mathrm{Fr}(]0,1[) = \{0,1\}$
- $\mathrm{Fr}(]0,1]) = \{0,1\}$
- $\mathrm{Fr}(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}$

• *En el espacio de Sierpinski,*

- $\mathrm{Fr}(\{0\}) = \{1\}$
- $\mathrm{Fr}(\{1\}) = \{1\}$

- *En* $\mathbb{R}^2$ *con la topología usual*

$$\mathrm{Fr}(\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}) = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Propiedades:

1. $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)$
2. $\mathrm{Fr}(A) \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$
3. $\mathrm{Adh}(A) = \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Int}(A)$
4. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in X \mid (\forall N \in \mathcal{N}_x) N \cap A \neq \varnothing \wedge N \cap A^c \neq \varnothing\}$

Definición 2.5.5 (Derivado) *Sea $A \subseteq X$. El* derivado *A' de A es el conjunto definido por*

$$A' := \{x \in X \mid (\forall N \in \mathcal{N}_x) N \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing\}.$$

Los elementos de A' se llaman Puntos de Acumulación *o de* Adherencia *de A*

Ejemplo 2.5.5

- *En* $\mathbb{R}$ *con la topología usual,*
  - $(]0,1[)' = (]0,1])' = [0,1]$
  - $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_*\}' = \{0\}$
- *En el espacio de Sierpinski,*
  - $(\{0\})' = \{1\}$
  - $(\{1\})' = \varnothing$
- *En* $\mathbb{R}^2$ *con la topología usual*

$$\{(x,0) \mid 0 < x < 1\}' = \{(x,0) \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

Propiedades:

1. $\overline{A} = A \cup A'$; en particular, A es cerrado si y s'olo si $A' \subseteq A$
2. $A' = \{x \in X \mid x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$

Para finalizar esta sección, consideraremos un clase especial de subconjuntos de X.

Definición 2.5.6 (Densos) *Se dice que A es* denso *en X si $\overline{A} = X$. Claramente, X es denso en X y de hecho es el único conjunto cerrado que es denso.*

Ejemplo 2.5.6 • *En $\mathbb{R}$ con la topología usual, el conjunto $\mathbb{Q}$ es denso. Más generalmente el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ con todas sus coordenadas racionales es denso en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.*

- *En el espacio de Sierpinski $\{0\}$ es denso.*

Proposición 2.5.1 *los siguiente enunciados son equivalentes*

1. *D es denso en X*
2. *Si F es un subconjunto cerrado en X y $D \subseteq F$, entonces $F = X$*
3. *Si $U \neq \varnothing$ es un abierto en X entonces $D \cap U \neq \varnothing$*
4. $\mathrm{Int}(D^c) = \varnothing$

Definición 2.5.7 *Un espacio topológico se dice* separable *si contiene un subconjunto numerable denso.*

Ejemplo 2.5.7 *En $\mathbb{R}$ con la topología usual, el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales y el conjunto $\mathbb{I}$ de los irracionales son ambos densos. Como $\mathbb{Q}$ es numerable, $\mathbb{R}$ es separable. Similarmente, $\mathbb{R}^n$ con la topología usual también es separable (conjunto numerable denso $\mathbb{Q}^n$).*

Proposición 2.5.2 *Sea (X, d) un espacio métrico. Las siguientes propiedades son equivalentes*

1. *La topología $\mathcal{T}(d)$ inducida por la métrica d es base numerable*
2. *$(X, \mathcal{T}(d))$ es separable.*

2.6 Subespacios topológicos: Topología traza

Definición 2.6.1 (Topología Traza) *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $Y \subseteq X$ un subconjunto no vacío. La* Topología Traza *o* Inducida *$\mathcal{T}_Y$ sobre Y es*

$$\mathcal{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}(= \text{“}\mathcal{T} \cap Y''\text{)}$$

y a $(Y, \mathcal{T}_Y)$ se le llama Subespacio Topológico *de $(X, \mathcal{T})$.*

Observación: La verificación de que $\mathcal{T}_Y$ así definido es una topología sobre Y queda como ejercicio.

Ejemplo 2.6.1
- *Sea* $Y = [0,1[\cup\{2\} \subseteq \mathbb{R}$, *éste último dotado de la topología usual. los siguientes subconjuntos de* Y *son abiertos para la topología traza:* $\{2\}$, *todos los intervalos abiertos* $]a,b[\subseteq [0,1[$, *todos los intervalos de la forma* $[0,a[$ *(éstos son vecindades de 0 en* Y *pero no en* $\mathbb{R}$*). El subconjunto* $[0,1[$ *es abierto y cerrado en* Y. *Notemos que los abiertos y cerrados en* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *no necesariamente son abiertos y cerrados en* $\mathbb{R}$ *con la topología usual.*

- *Se define* $\mathbb{R}$ *extendido a* $\overline{\mathbb{R}}$ *de la siguiente manera: al conjunto de los números reales* $\mathbb{R}$, *adjuntamos dos puntos* $+\infty$ *y* $-\infty$ *definiendo* $\mathbb{R} := \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. *dotado de la topología* $\mathcal{T}$ *generada por la siguiente familia de conjuntos:*

$$[-\infty, a[:= \{-\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$$

y

$$]a, \infty] := \{\infty\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

con $a \in \mathbb{R}$. *Intuitivamente,* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}})$, *donde* $\mathcal{T}_{\mathbb{R}}$ *es la topología traza. inducida por* $\mathcal{T}$, *no es otra cosa que* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. De hecho, ésto es efectivamente así, como se desprenderá del siguiente resultado general.(Teorema 2.6.1 (1))*

Teorema 2.6.1 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico e* $(Y, \mathcal{T}_Y)$ *un subespacio. Entonces*

1. *Si* $\{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *es una base (resp. subbase) para* $\mathcal{T}$, *entonces* $\{U_\lambda \cap Y \mid \lambda \in \Lambda\}$ *es una base (resp. subbase) para* $\mathcal{T}_Y$

2. *Sea* $A \subseteq Y$. *Entonces,* A *es cerrado con respecto a* $\mathcal{T}_Y$ *si y sólo si* $A = F \cap Y$ *con* F *cerrado con respecto a* $\mathcal{T}$

3. $\overline{A}^Y = \overline{A} \cap Y$; $(A')^Y = A' \cap Y$; $\mathrm{Int}(A) \cap Y \subseteq \mathrm{Int}^Y(A)$; $\mathrm{Fr}(A) \cap Y \subseteq \mathrm{Fr}^Y(A)$

Ejemplo 2.6.2
- *En* $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ *puede identificarse con el subconjunto* $\mathbb{R}\times\{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. *Como la topología usual de* $\mathbb{R}^2$ *tiene como base los rectangulos abiertos* $]a,b[\times]c,d[$, *entonces la topología traza sobre* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *tiene como base la familia* $\{]a,b[\times\{0\} \mid a < b\}$. *De este modo, el subespacio* $(\mathbb{R}\times\{0\}, \mathcal{T}_{\mathbb{R}\times\{0\}})$ *de* $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T} =$ *Top. usual*$)$ *es "equivalente" a* $\mathbb{R}$ *con la topología usual. Más adelante daremos una definición precisa de esta equivalencia cuando estudiemos homeomorfismos entre espacios topol'ogicos.*

- *Un subespacio $Y \subseteq X$ se llama* Subespacio Discreto *de X cuando la topología traza $\mathcal{T}_Y$ es la topología discreta en Y (i.e $\mathcal{T}_Y = \mathcal{P}(X)$). Por ejemplo, $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ es un espacio discreto de $\mathbb{R}$ con la topología usual. Notemos que Y no es ni abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$*

Ejemplo 2.6.3 (Subespacios Métricos) *Sea (E, d) un espacio métrico y sea $F \subseteq E$ con $F \neq \varnothing$. Entonces F dotado de la métrica restringida a $F \times F$ es un espacio métrico que de notamos simplemente (F, d_f), y a $d_f = d\colon F \times F \to \mathbb{R}$ se llama métrica inducida. En principio es posible dotar a F de dos topologías: la topolog'ia $\mathcal{T}(d_F)$ inducida por la métrica d_f y la topología traza $\mathcal{T}(d)_F$ inducida por la topología $\mathcal{T}(d)$ sobre F. De hecho ambas topologías son idénticas. En efecto,*

$$\begin{aligned} B_{d_f}(x,r) &= \{y \in F \mid d(y,x) < r\} \\ &= \{y \in F \mid d(y,x) < r\} \cap F \\ &= B_d(x,r) \cap F \in \mathcal{T}(d)_F, \ \forall x \in F. \end{aligned}$$

Ahora bien, Como $\{B_{d_f}(x,r) \mid x \in F, \ r > 0\}$ es una base para $\mathcal{T}(d_F)$, deducimos que $\mathcal{T}(d_F) \subseteq \mathcal{T}(d)_F$. Reciprocamente, si $A \subseteq F$ es tal que $A \in \mathcal{T}(d)_F$ entonces $\exists U \in \mathcal{T}(d)$ tal que $A = U \cap F$. luego, $\forall x \in A$ se tiene que existe $r > 0$ tal que

$$B_{d_f}(x,r) = B_d(x,r) \cap F \subseteq U \cap F = A,$$

y en consecuencia, $A \in \mathcal{T}(d_F)$.

Ya hemos visto que los abiertos de un subespacio no necesariamente son abiertos en el espacio entero. El siguiente resultado clarifica cuando esto ocurre.

Proposición 2.6.1 *Sea Y un subespacio de X. Si $A \subseteq Y$ es abierto (resp. cerrado) en Y e Y es abierto (resp. cerrado) en X, entonces A es abierto (resp. cerrado) en X*

Finalmente tenemos la siguiente propiedad de transitividad

Proposición 2.6.2 *Un subespacio de un subespacio es un subespacio del espacio entero.*

2.7 Axiomas de separación

Hasta ahora el único requisito sobre una topología ha sido satisfacer su definición. Sin embargo, existen ciertas características adicionales que son deseables de tener en la topología que se está utilizando para el análisis de una situación en particular. En esta sección discutiremos los llamados axiomas de separación de Alexandroff y Hopf, los cuales tienen que ver con c'omo se distribuyen los conjuntos abiertos de modo que sean capaces de "separar" diversos tipos de subconjuntos. Como veremos a travez de algunos ejemplos, siempre es posible encontrar un espacio topológico que *no* satisface las propiedades descritas en los axiomas de separación. Sin embargo, usualmente en las aplicaciones la topología que se "impone" naturalmente sí satisface al menos una propiedad de separación, por muy débil que sea. A modo de ilustración, observamos que un espacio métrico satisface *todos* los axiomas de separación que veremos.

Definición 2.7.1 *Un espacio topológico* $(X,\mathcal{T})$ *se dice* **T0** *si* $\forall x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $\exists U \in \mathcal{T}$ *tq o bien* $x \in U$ *e* $y \in X \setminus U$ *o bien* $x \in X \setminus U$ *e* $y \in U$.

Ejemplo 2.7.1
- *Dado* $X \neq \varnothing$, $(X, \{\varnothing, X\})$ *no es T0. Es decir la topología grosera tiene "muy pocos" abiertos como para poder separar puntos.*
- *El espacio de Sierpinski* $(\{0,1\},\{\varnothing,\{0\},\{0,1\}\})$ *es T0.(basta tomar U=*$\{0\}$*).*

Definición 2.7.2 *Un espacio topológico* $(X,\mathcal{T})$ *se dice* **T1** *si* $\forall x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $\exists U, V \in \mathcal{T}$ *tq* $x \in U$, $y \in X \setminus U$ *e* $y \in V$, $x \in X \setminus V$

Ejemplo 2.7.2 *El espacio de Sierpinski* no *es T1 pues el único abierto que contiene a 1 es* $\{0,1\}$ *que también contiene al 0. Sin embargo, si a* $\{0,1\}$ *lo dotamos de la topología discreta* $(\{\varnothing,\{0\},\{1\}\{0,1\}\})$ *entonces sí es T1. Como ejercicio queda verificar que T1⇒T0.*

Teorema 2.7.1 *Un espacio topológico* $(X,\mathcal{T})$ *es* **T1** *si y sólo si* $\forall x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$

Definición 2.7.3 *Un espacio topológico* $(X,\mathcal{T})$ *se dice* **T2** *o* Hausdorff *si* $\forall x, y \in X$ *con* $x \neq y$, $\exists U, V \in \mathcal{T}$ *tq* $x \in U$, $y \in V$ *y* $U \cap V \neq \varnothing$

Lo anterior es equivalente a pedir que si $\{\mathcal{B}_x\}_{x\in X}$ es una base de vecindades entonces $\forall x, y \in X$, $\exists V_x \in \mathcal{B}_x$, $\exists V_y \in \mathcal{B}_y$ tales que $V_x \cap V_y = \varnothing$

Ejemplo 2.7.3
- *Sea* X *un conjunto infinito dotado de la topología "cofinita" definida por*

$$\mathcal{T} = \{u \subseteq X \mid X \setminus U \text{ es finito } \} \cup \{\varnothing\}$$

- $\mathbb{R}$ *con la topología usual es Hausdorff o T2: sean* $x, y \in \mathbb{R}$ *con* $x \neq y$, *y definamos* $\varepsilon = |x - y|/2$. *Entonces* $V_x =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ *y* $V_y =]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ *separan* x *e* y *pues* $V_x \cap V_y = \varnothing$

Definición 2.7.4

- *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *se dice* **regular** *si* $\forall x \in X, \forall F \subseteq X \setminus \{x\}$ *con* F *cerrado,* $\exists U, V \in \mathcal{T}$ *tales que* $x \in U,\ F \subseteq V$ *y* $U \cap V = \varnothing$
- $(X, \mathcal{T})$ *se dice* **T3** *si es un espacio* **T2** *regular.*

Teorema 2.7.2 *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es regular si y sólo si* $\forall x \in X,\ \forall U \in \mathcal{T}$ *con* $x \in U,\ \exists V \in \mathcal{T}$ *tal que* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Ejemplo 2.7.4 $\mathbb{R}$ *con la topolog'ia usual es regular (¡Verificarlo!).*

Definición 2.7.5

- *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *se dice* **normal** *si* $\forall F_1, F_2 \subseteq X$ *cerrados con* $F_1 \cap F_2 = \varnothing,\ \exists G_1, G_2 \in \mathcal{T}$, *disjuntos , tales que* $F_1 \subseteq G_1,\ F_2 \subseteq G_2$
- $(X, \mathcal{T})$ *se dice* **T4** *si es un espacio* **T2** *normal*

Teorema 2.7.3 *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es normal si y sólo si* $\forall F \subseteq X,\ \forall U \in \mathcal{T}$ *con* $F \subseteq U,\ \exists V \in \mathcal{T}$ *tal que* $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Curiosamente, la implicación [$(X, \mathcal{T})$ normal $\Rightarrow$ $(Y, \mathcal{T}_Y)$ normal] en general no es cierta, pero la construcción de contra–ejemplos requiere de topologías complicadas (sobre los ordinales por ejemplo) y no lo haremos.
Obviamente, se tiene que T4⇒T3⇒T2⇒T1⇒T0
Antes de finalizar esta sección, daremos algunas caracterizaciones equivalentes y propiedades de los espacios de *Hausdorff* o **T2**, las cuales bastan para asegurar que ciertos comportamientos "patológicos" no ocurren.

Teorema 2.7.4 *Las siguentes propiedades son equivalentes*

1. $(X, \mathcal{T})$ *es Hausdorff*
2. $\forall x \in X,\ \forall y \neq x,\ \exists N \in N_x(\mathcal{T}) \mid y \in X \setminus \overline{N}$
3. $\forall x \in X,\ \cap\{\overline{N} \mid N \in N_x(\mathcal{T})\}_{\{}x\}$

Teorema 2.7.5 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio de Hausdorff. Entonces:*

1. *Todo subconjunto finito es cerrado*
2. x *es un punto de acumulación (o de adherencia) de* $A \subseteq X$, *i.e.* $x \in A'$, *si y sólo si* $\forall N \in N_x(\mathcal{T}), N \cap A$ *es finito. (Toda vecindad de* x *contiene infinitos puntos de* A*).*

2.8 Convergencia: sucesiones y redes

La noción de convergencia aparece en el Análisis cuando queremos formalizar la idea de "acumularse" en torno a un punto, En el caso de $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{R}^n$) con la topología usual,lo anterior se lleva a cabo en base al concepto de *suceción.* En efecto, dado $x \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[\}_{n\geq 1}$ constituye una base de vecindades de x, por lo que para "acumularse en torno a x" basta con tener un punto x_n en cada uno de estos intervalos; así como cualquier $N \in \mathcal{N}_x$ contiene a todos los intervalos $]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$ a partir de cierto n suficientemente grande, digamos $\forall n \geq n_0$ para cierto n_0, entonces $x_n \in N,\ \forall n \geq n_0$. Como además se puede escoger la sucesi'on de modo tal que $x_n \neq x,\ \forall n \geq 1$, entonces concluimos que es posible acumularse en torno a x sin ser jamás igual a él, estando tan cerca de x como queramos. Aunque algo vaga, esta breve discución nos permite aventurar que el concepto de sucesión será muy útil para describir las propiedades topológicas de $\mathbb{R}$, o más generalmente de cualquier espacio topológico que en cada punto admite una base numerable de vecindades. Sin embargo, también podemos adivinar que cuando no contemos con bases numerábles de vecindades, las sucesiones no serán suficientes para caracterizar todas las propiedades que nos interesan, por lo que será necesario introducir un nuevo concepto más adecuado para discutir la "convergencia" en tales espacios.

Definición 2.8.1 (Sucesión) *Una Sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un conjunto X es una función $\varphi\colon \mathbb{N} \to X$ tal que $\forall n \in N,\ \varphi(n) = x_n$.*

Decimos que una sucesión $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge* a $\overline{x} \in X$ para una topología $\mathcal{T}$ en X si

$$(\forall N \in N_{\overline{x}}(\mathcal{T}))(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ :\ \forall n \geq n_0,\ x_n \in \mathbb{N},$$

lo que anotamos simbólicamente por $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} \overline{x}$. cuando la topología se subentiende sin ambiguedad, escribimos simplemente $x_n \to \overline{x}$.
Decimos que $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se *acumula* en X si

$$(\forall N \in N_{\overline{x}}(\mathcal{T}))(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \leq n_0)\ :\ x_n \in \mathbb{N}.$$

Cuando $x_n \to \overline{x}$ decimos que $\overline{x}$ es un punto límite de la sucesión $\{X_n\}$, mientras que cuando $\{X_n\}$ se acumula en $\overline{x}$, decimos que $\overline{x}$ es un punto de acumulación de $\{X_n\}$.

Teorema 2.8.1 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Si $x \in X$ admite una base numerable de vecindades $\{N_n\} \subseteq N_x$ entonces:*

$$\forall A \subseteq X, [x \in \overline{A} \iff \exists \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \mid x_n \to x]$$

Definición 2.8.2 (Redes) *Un conjunto D con una relación $\preccurlyeq$ se dice dice dirigido si*

1. $D \neq \varnothing$.
2. $\preccurlyeq$ *es un preorden en D (refleja y transitiva).*
3. $(\forall a, b \in D)(\exists c \in D) a \preccurlyeq c \wedge b \preccurlyeq c$.

Una red $\{X_i\}_{i\in D}$ en un conjunto X es una función $\varphi\colon D \to X$ con $(D, \preccurlyeq)$ un conjunto dirigido y tal que $\forall i \in D,\ x_i = \varphi(i)$.

[Algunos autores escriben $(\{X_i\}_{i\in D}, \preccurlyeq)$ para enfatizar la dependencia de la red del preorden considerado en D, nosotros no lo haremos así para simplificar la notación, pero esta dependencia debe tomarse siempre presente].
Decimos que $\{X_i\}_{i\in D}$ converge a $\overline{x} \in X$ para una topología $\mathcal{T}$ en X si

$$(\forall N \in N_{\overline{x}}(\mathcal{T}))(\exists i_0 \in D) \mid \forall j \succcurlyeq i_0,\ x_j \in \mathbb{N},$$

y escribimos $x_i \xrightarrow{\mathcal{T}} \overline{x}$ o simplemente $x_i \to \overline{x}$.
Similarmente decimos que la red $\{X_i\}_{i\in D}$ se acumula en $\overline{x} \in X$ si

$$(\forall N \in N_{\overline{x}}(\mathcal{T}))(\forall i \in D)(\exists j_0 \succcurlyeq i,\ x_{j_0} \in \mathbb{N},$$

y escribimos $x_i \propto \overline{x}$

Ejemplo 2.8.1

- *El conjunto de los n'umeros naturales $\mathbb{N}$ dotado del orden usual es dirigido. Una red con dominio $D = \mathbb{N}$ es simplemente una suce-si'on y las definiciones de convergencia y de acumularse en torno a un punto coinciden.*

- *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topol'ogico y sea $x \in X$. Si $\mathcal{B}_x$ es una base de vecindades e x (por ejemplo: $\mathcal{B}_x = \mathcal{N}_x$ o $\mathcal{B}_x = \{U \in \mathcal{T} \mid x \in U\}$) entonces $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$ es dirigido. En efecto, $\mathcal{B}_x \neq \varnothing$ por base, $\supseteq$ es un preorden y si $V_1, V_2 \in \mathcal{B}_x$ entonces $\exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq V_1 \cap V_2$ (por BN2) y 'este satisface $V_1 \supseteq V \wedge V_2 \supseteq V$.*

- *Si X tiene la topología grosera $\{\varnothing, X\}$, entonces $\forall x \in X,\ \mathcal{N}_x = \{X\}$ y por lo tanto toda red converge a todo $x \in X$.*

- *Si X tiene la topología discreta $\mathcal{P}(X)$ entonces $\forall x \in X, \{x\} \in \mathcal{N}_x$ y por lo tanto una red $\{x_i\}_{i\in D}$ converge a x si y s'olo si $\exists i_0 \in D\colon \forall j \succcurlyeq i_0, x_i = x$. (red estacionaria a partir de i_0). Similarmente $x_i \propto x$ si y s'olo si $\forall i \in D\ \exists j_0 \succcurlyeq i\ :\ x_{j_0} = x$.*

- *Si X es un espacio topológico arbitrario, un ejemplo importante de red convergente es el siguiente: Dado $x \in X$ y $\mathcal{B}_x$ base de vecindades de x ordenada segun $supseteq$ de modo que $(\mathcal{B}_x, \supseteq)$ es un conjunto dirigido. Sea $\varphi\colon \mathcal{B}_x \to X$ una función de selección: $\forall V \in \mathcal{B}_x,\ \varphi(V) \subseteq V$. entonces la red $\{x_v\}_{V\in\mathcal{B}_x}$ con $x_v = \varphi(V)$ satisface $x_V \to x$. En efecto, dado $N \in \mathcal{N}_x,\ \exists V \in \mathcal{B}_x$ tal que $V \subseteq N$ y $\forall V' \in \mathcal{B}_x$ con $V' \subseteq V$ tenemos $x'_V \in V' \subseteq V \subseteq N$.*

Teorema 2.8.2 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces:*
$(X, \mathcal{T})$ es Hausdorff $\Leftrightarrow$ Toda red en X converge a lo más a un punto.

Teorema 2.8.3 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces*

1. *$\forall x \in X,\ x \in \overline{A} \Leftrightarrow \exists\{x_i\}_{i\in D}$ red en A tal que $x_i \to x$.*
2. *$\forall x \in X,\ x \in A' \Leftrightarrow \exists\{x_i\}_{i\in D}$ red en $A \setminus \{x\}$ tal que $x_i \to x$.*
3. *A es cerrado $\Leftrightarrow \exists\{x_i\}_{i\in D}$ red en $A,\ \forall x \in X; [x_i \to x \Rightarrow x \in A]$*

Definición 2.8.3 (Subredes) *Una red $\{Y_j\}_{j\in E}$ (con $(E, \preccurlyeq')$ un conjunto dirigido) se dice subred de $\{X_i\}_{i\in D}$ (con $(D, \preccurlyeq)$ un conjunto dirigido) si $\exists f\colon E \to D$ (función de combio de 'indice) tal que*

1. *$y = x \circ f$, i.e. $y_j = x_{f(j)},\ \forall j \in E$*
2. *$(\forall i \in D)(\exists j_0 \in E)(\forall j \in E)\ :\ j \succcurlyeq' j_0 \Rightarrow f(j) \succcurlyeq i$ (cuando j crece, $f(j)$ también)*

Observación: una subsucesión de una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subred, pero la recíproca no siempre es cierta.

Proposición 2.8.1 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\{x_i\}_{i\in D} \subseteq X$ una red. Entonces $x_i \propto x \in X$, i.e. x es un punto de acumulación de $\{x_i\}_{i\in D}$, si y sólo si existe $\{Y_j\}_{j\in E}$ subred de $\{x_i\}_{i\in D}$ tal que $y_j \to x$.*

Proposición 2.8.2 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\{x_i\}_{i\in D} \subseteq X$ una red. Entonces $x_i \to x$ si y sólo si para toda subred $\{Y_j\}_{j\in E}$ de $\{x_i\}_{i\in D}$ existe una subred $\{z_k\}_{k\in F}$ de $\{Y_j\}_{j\in E}$ tal que $z_k \to x$*

¿Y que ocurre con las sucesiones? Como ya hemos visto, en general no bastan para describir todas las propiedades topológicas de un espacio cuyos puntos no admiten bases de vecindades numerables. Más aún, las sucesiones en espacios topológicos generales pueden exibir ciertos comportamientos patológicos, como lo muestra el siguiente ejemplo de R. Arens.

Ejemplo 2.8.2 *Sea $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dotado de la siguiente topología:*

- *Si $(m, n) \neq (0, 0)$entonces $\{(m, n)\}$ es abierto (y define una base de vecindades de (m, n)).*

- *Las vecindades $V \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de $(0, 0)$ son los conjuntos V que satisfacen la sguiente condición: $(0, 0) \in V$ y $\forall n \in \mathbb{N}$, salvo tal vez un n'umero finito de ellos, el conjunto $\{m \in \mathbb{N} \mid (n, m) \notin V\}$ es finito.*

Las siguientes afirmaciones quedan como ejercicio

1. *Lo anterior define una topologa $\mathcal{T}$ en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. el espacio $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathcal{T})$ es Hausdorff.*

2. *Ninguna sucesión en $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ converge a $(0, 0)$*

3. *Existe una sucesión en $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \setminus \{(0, 0)\}$ que converge a $(0, 0)$ pero no tiene subsucesiones convergentes a $(0, 0)$.*

De este modo en un espacio topológico general pueden haber sucesiones que se acumulan en torno a un punto y que sin embargo no tienen ninguna subsucesi'on que converge a dicho punto. Sin embargo, las sucesiones no exiben tales comportamientos patológicos cuando se trata de otras propiedades o cuando el espacio tiene propiedades adicionales, como lo establece el siguiente resultado:

Teorema 2.8.4 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces*

1. *Para toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$:*

    - $(x_n \to x) \Rightarrow (x_{n_k} \to x)$
    - $(x_n \propto x) \Rightarrow (x_{n_k} \propto x)$

2. *$x_n \to x$ si y sólo si toda subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ contiene a su vez una subsucesión $\{x_{n_{k_l}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_{k_l}} \to x$*

3. *Supongamos que x admite una base numerable de vecindades. Entonces $x_n \propto x$ si y s'olo si existe un subsucesi'on $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} \to x$*

Observación: En particular, la propiedad 3 es v'alida para todo x y $(X, \mathcal{T})$ es un espacio m'etrico (i.e T= T(d) para alguna m'etrica en X).

2.9 Compacidad

En esta sección estudiaremos los espacios topológicos compactos, que juegan un rol fundamental en practicamente todas las ramas de las matemáticas pues la propiedad que los distingue está asociada a los resultados de "existencia". Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología usual la compacidad es lo que hace que noción de continuidad uniforme funcione, asegurando la existencia de máximos y mínimos.

Definición 2.9.1 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento de X si $X = \cup_{i\in I} A_i$. Este recubrimiento se dice abierto si $\forall i \in I, A_i \in \mathcal{T}$. Si I es finito entonces se dice que el recubrimiento es finito. Un subrecubrimiento es una subfamilia $\{A_j\}_{j\in J}$ con $J \subseteq I$ tal que $\{A_j\}_{j\in J}$ tambien es un recubrimiento de X. M'as generalmente, un refinamiento de $\{A_i\}_{i\in I}$ es otro recubrimiento $\{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $(\forall\lambda \in Lambda)(\exists i \in I) B_\lambda \subseteq A_i$.*

Definición 2.9.2 (Compacidad) *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice* Compacto *si todo recubrimiento abierto de X contiene subrecubrimiento finito.*

Ejemplo 2.9.1

- – *Si aceptamos que $\varnothing$ como subespacio topológico dotado de la única topología posible $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$ entonces evidentemente $(\varnothing, \{\varnothing\})$ es compacto*
  – *Más generalmente, si X es un conjunto fin'ito entonces $(X, \mathcal{T})$ es compacto para todas las posibles topologías $\mathcal{T}$.*
- – *$\mathbb{R}$ con la topología usual no es compacto pues*

  $$\{]-n, n[\mid n \in \mathbb{N}\}$$

  es un recubrimiento abierto numerable que no admite ningún subrecubrimiento finito.
  – *$(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ con $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\{[a, b[\mid a < b\})$ no es compacto pues el recubrimiento abierto $[-n, n[$ no contiene subrecubrimientos finitos.*
  – *$(\mathbb{R}, cofinita)$ con $cofinita = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A^c es\ finito\}$ es compacto; en efecto, cualquier mienbro A_i de un recubrimiento abierto de $\mathbb{R}$ satisface $\mathbb{R} \setminus A_i$ finito y por lo tanto $\mathbb{R} \setminus A_i$ está contenido en una unión finita de otros miembros del recubrimiento original. Similarmente cualquier subespacio topológico de $(\mathbb{R}, cofinita)$ es compacto.*

Observación: En general, la compacidad no es una propiedad hereditaria: los subespacios de un espacio topológico compacto no son necesariamente compactos. A

modo de ejemplo, veremos que consistentemente con la terminología usual, $[a, b]$ es un subespacio compacto de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$, sin embargo $[a, b[$ no es compacto (como subespacio de $[a, b]$, que por transitividad, es lo mismo que
En efecto, $\{[a, b - \frac{(n-a)}{2n}[\mid n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento abierto de $[a, b[$ que no contiene ningún subrecubrimiento finito.
Los ejemplos y observaciones anteriores motivan la siguiente defenición:

Definición 2.9.3 *Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice compacto en $(X, \mathcal{T})$ si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es compacto, donde $\mathcal{T}_Y$ es la topología traza de $\mathcal{T}$ en Y. De manera equivalemnte, Y es compacto en $(X, \mathcal{T})$ si y sólo si toda familia $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ con $Y \subseteq \cap_{i \in I} A_i$ admite un subrecubrimiento finito de Y i.e. $\exists J \subseteq I$ finito tal que $Y \subseteq \cup_{j \in J} A_j$.*

Con esta definición podemos decir que $\varnothing$ es compacto en cualquier espacio topológico, lo mismo que un conjunto finito siempre es compacto en un e.t,
Es posible dar una caracterización equivalente a la compacidad en t'erminos de intersecciones de conjuntos cerrados.

Definición 2.9.4 *Sea X un conjunto y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de subconjuntos de X. Decimos que $\{A_i\}_{i \in I}$ tiene la propiedad de intersección finita o* **(PIF)** *si $(\forall J \subseteq I$ finito $) \cap_{j \in J} A_j \neq \varnothing$.*

Proposición 2.9.1 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un e.t. Son equivalentes:*

1. *$(X, \mathcal{T})$ es compacto*
2. *Toda familia $\{F_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de X que tiene la* **(PIF)** *satisface $\cap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.*

Teorema 2.9.1
1. *Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es compacto.*
2. *Si $(X, \mathcal{T})$ es compacto y Hausdorff y $K \subseteq X$ es compacto, entonces K es cerrado*

Proposición 2.9.2 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico Hausdorff.*

1. *Si $A, B \subseteq X$ son conjuntos compactos en $(X, \mathcal{T})$ tales que $A \cap B = \varnothing$, entonces existen $U, V \in \mathcal{T}$ tales que $A \subseteq U,\ B \subseteq V$ y $U \cap V = \varnothing$*
2. *Si $K \subseteq X$ escompacto en $(X, \mathcal{T})$ con este 'ultimo espacio regular, entonces $\forall U \in \mathcal{T}$ con $K \subseteq U,\ \exists V \in \mathcal{T}$ tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$*
3. *Sea ω_0 un ordinal inicial y sea $\{K_\mu \mid \mu < \omega_0\}$ una familia no–creciente de subconjuntos compactos no vacíos de X, i.e. $\mu < \nu \Rightarrow K\mu \subseteq K_\nu$. Entonces:*

(a) $C = \cap_{\mu<\omega_0} K_\mu$ *es no vac'io y compacto (Teorema de Cantor)*

(b) *Para todo abierto* $U \supseteq C$*, existe* $\mu_0 < \omega_0$ *tal que* $\forall \mu \leq \omega_0, F_\mu \subseteq U$.

Teorema 2.9.2 *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *es compacto si y sólo si toda red en* X *tiene al menos un punto de acumulación (i.e admite una subred convergente)*

Teorema 2.9.3 *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico compacto. Entonces una red (resp. una sucesión) de puntos en* X *converge a* $\bar{x}$ *si y sólo si* $\bar{x}$ *es el único punto de acumulación de la red (resp. la sucesión).*

Teorema 2.9.4 (Bolzano–Weierstrass) *Sea* (X, d) *un espacio métrico. un subconjunto* $Y \subseteq X$ *es compacto en* (X, d) *si y sólo si toda sucesión de puntos en* Y *admite al menos un punto de acumulación (i.e tiene una subsucesión convergente).*

Definición 2.9.5 *Un espacio métrico se dice precompacto si es posible recubrirlo con un número finito de bolas abiertas de radio arbitrario pero fijo para todas las bolas.*

Proposición 2.9.3 *Todo espacio métrico precompacto es separable; en particular posee una base numerable de abiertos.*

Teorema 2.9.5 (Heine–Borel–Lebesgue) *Sea* $\mathbb{R}$ *co la topología usual. Entonces* $K \subseteq \mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

2.10 Continuidad

Hasta ahora hemos considerado las propiedades topológicas de un espacio dado. Ahora nos interesa poder relacionar las propiedades de los diferentes espacios topológicos. Sean $(X, \mathcal{T})$ y $(X', \mathcal{T}')$ dos espacios topológicos y consideramos una función $f\colon X \to X'$. Recordemos que ésta induce a su vez dos funciones $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X')$ y $f^{-1}\colon \mathcal{P}(X') \to \mathcal{P}(X)$ llamadas función imagen y pre–imagen respectivamente. De estas, f^{-1} parece ser la mas apropiada para relacionar las topologías pues preserva las operaciones de uni'on e intersecci'on utilizadas en la definición de una topología. Así las funciones que nos interesan son aquellas que satisfacen $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$ de modo que $f^{-1}|_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T}' \to \mathcal{T}$.

Definición 2.10.1 *Sean* $(X, \mathcal{T})$ *y* $(X', \mathcal{T}')$ *dos espacios topológicos. una función* $f\colon X \to X'$ *se dice* Continua *si* $\forall u \in \mathcal{T}',\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$*. (i.e. la preimagen o imagen inversa de un abierto en* X' *es a su vez un abierto en* X*).*

Ejemplo 2.10.1

Notación: Escribimos $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ para enfatizar la dependencia para la continuidad de las topolog'ias consideradas. si éstas últimas están implícitas, escribimos simplemente $f\colon X \to X'$.

Proposición 2.10.1 Composición *Si*
$f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ y $g\colon (X',\mathcal{T}') \to (X'',\mathcal{T}'')$ son continuas entonces

$$g \circ f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X'',\mathcal{T}'')$$

es continua.

Restrición del dominio *Si $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es continua e $Y \subseteq X$ entonces*

$$f|_Y\colon (Y,\mathcal{T}_Y) \to (X',\mathcal{T}')$$

es continua

Restricción de la imagen *Si $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es continua entonces*

$$f\colon (X,\mathcal{T}) \to (f(X),\mathcal{T}'_{f(X)})$$

es continua.

Teorema 2.10.1 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una función. las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *$\forall F \subseteq X'$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en $(X,\mathcal{T})$.*
3. *La imagen inversa de cada miembro de una subbase (o base) para $(X',\mathcal{T}')$ es un abierto en $(X,\mathcal{T})$ (no necesariamente un miembro de una subbase o base para $(X,\mathcal{T})$)*
4. *$\forall x \in X,\ \forall N' \in \mathcal{N}_{f(x)}(\mathcal{T}'), \exists N \in \mathcal{N}_x(\mathcal{T}) \mid f(N) \subseteq N'$*
5. *$f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$*
6. *$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(\bar{B})$ para todo $B \subseteq X'$*

Observación: En (4) basta tomar N' en un sistema fundamental de vecindades de $f(x)$. (o base de vecindades que es lo mismo).
La propiedad (4) anterior caracteriza la continuidad de un funci'on a partir de un comportamiento "local", motivando la siguiente definici'on:

Definición 2.10.2 *Una función $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ se dice continua en $x_0 \in X$ si*

$$\forall N' \in \mathcal{N}_{f(x_0)}, \exists N \in \mathcal{N}_{x_0} : \ f(N) \subseteq N' \ (\Leftrightarrow \forall N' \in \mathcal{N}_{f(x_0)},\ f^{-1}(N') \in \mathcal{N}_x)$$

Desde este punto de vista, la equivalencia (1) $\iff$ (4) en el teorema 2.10.1 dice que una función es continua ssi la función es continua en cada punto del espacio.

Ejemplo 2.10.2

Proposición 2.10.2 *Sean $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ dos espacios topológicos. una función $f\colon X \to X'$ es continua en $x_0 \in X$ ssi para toda red $\{x_i\}_{i\in D}$ en X, $x_i \to x_0 \Rightarrow f(x_i) \to f(x_0)$.*

Observación: En el caso de espacios métricos, la proposición anterior es válida con "red" reemplazado por "sucesión".

Proposición 2.10.3 *Una función $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ se dice abierta (resp cerrada) si la imagen de cada conjunto abierto (resp cerrada) en X'*

Ya hemos visto que una función continua no necesariamentees abierta (ni cerrada) y que una función abierta (o cerrada) no tiene por qué ser continua. El siguiente ejemplo muestra que en general una función abierta no necesita ser cerrada, de donde se concluye que los conceptos "función abierta", "función cerrada" y "función continua" son independientes.

Ejemplo 2.10.3

Proposición 2.10.4 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una función cerrada (resp. abierta). Dado cualquier subconjunto $A \subseteq X'$ y cualquier abierto (resp. cerrado) U tal que $f^{-1}(A) \subseteq U$, existe un abierto (resp. cerrado) $V \supseteq A$ tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$*

Teorema 2.10.2 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una función. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *f es abierta*
2. $f(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Int}[f(A)]$
3. *Si $\mathcal{B}$ es una base de abiertos de $(X,\mathcal{T})$ entonces:* $\forall U \in \mathcal{B},\ f(U) \in \mathcal{T}'$
4. $\forall x \in X, \forall N \in \mathcal{N}_x,\ \exists N' \in \mathcal{N}_{f(x)} \ : \ N' \subseteq f(N)$

2.10.1 Homeomorfismo

Definición 2.10.3 (Homeomorfismo) *Una función biyectiva y continua* $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *tal que* $f^{-1}\colon (X',\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ *también es continua, se llama* Homeomorfismo *de* $(X,\mathcal{T})$ *sobre* $(X',\mathcal{T}')$*, en cuyo caso se denota* $(X,\mathcal{T}) \cong (X',\mathcal{T}')$ *y se dice que ambos espacios son homeomorfos entre sí.*

Ejemplo 2.10.4

Observemos que un homeomorfismo es una función abierta (gracias a la continuidad de la inversa), por lo que si $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ es un homeomorfismo entonces se tiene simultaneamente dos biyecciones, una entre espacios y otra entre topologías. En efecto, tanto $f\colon X \to X'$ como la función inducida $f|_{\mathcal{T}}\colon \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ son biyectivas. En particular cualquier propiedad de $(X,\mathcal{T})$ expresada en términos de operaciones conjuntistas de conjuntos abiertos (esto es, cualquier propiedad topológica de $(X,\mathcal{T})$) es también válida para $(X',\mathcal{T}')$. Esto motiva lo siguiente:

Definición 2.10.4 *Una propiedad* P *de un espacio topológico se dice "propiedad topológica" o "invariante topológico" si* P *se preserva (no varía) bajo homeomorfismos.*

Observación: La propiedad de ser homeomorfos define una relación de equivalencia $\cong$ en la clase de todos los espacios topológicos. Las clases de equivalencia asociadas a esta relación se llaman "tipos de homeomorfismos", de modo que la topología estudia los invariantes de los tipos de homeomorfismos.
Los homeomorfismos pueden ser útiles para reducir un problema dado a uno más simple: un espacio topológico cuya construcción aparentemente es muy complicada puede ser eventualmente homeomorfo a uno mas familiar de modo que las propiedades topológicas se pueden determinar de manera más simple. Desafortunadamente, mostrar que dos espacios topológicos son homeomorfos es en general un problema dificil. Sin embargo un problema que es algo más simple que el anterior y a veces más importante, consiste en determinar si dos espacios *no* son homeomorfos, lo que se suele llevar a cabo exibiendo un invariante que es poseído por sólo uno de los dos espacios.

Caracterización y propiedades de los homeomorfismos

Teorema 2.10.3 *Sea* $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ *una biyección. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. f *es un homeomorfismo*
2. f *es continua y abierta*

3. *f es continua y cerrada*

4. *$f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ para todo $A \subseteq X$*

El siguiente resultado es útil para establecer que una función dada es un homeomorfismo

Teorema 2.10.4 *Sean $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ y $g\colon (X',\mathcal{T}') \to (X,\mathcal{T})$ dos funciones continuas tales que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$ y $f \circ g = \mathrm{Id}_{X'}$. Entonces $g = f^{-1}$ y f es un homeomorfismo.*

Observación: Aunque trivial hemos querido enunciar este resultado pues: la única técnica general para probar que una función f es un homeomorfismo es simplemente exibir una inversa continua. Para los subespacios topológicos tenemos

Teorema 2.10.5 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ un homeomorfismo. Si $A \subseteq X$ entonces tanto $f|_A\colon (A,\mathcal{T}_A) \to (f(A),\mathcal{T}'_{f(A)})$ como $f|_{X\setminus A}\colon (X \setminus A,\mathcal{T}_{X\setminus A}) \to (X' \setminus f(A),\mathcal{T}'_{X'\setminus f(A)})$ son homeomorfismos.*

Finalizamos esta sección estudiando que ocurre con la compacidad bajo transformaciones continuas.

Teorema 2.10.6 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ un función continua. Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ es compacto y $(X',\mathcal{T}')$ un e.t. cualquiera. Entonces, $f(X)$ es compacto como subespacio topológico de $(X',\mathcal{T}')$.*

Corolario 2.10.1 *Sea $f\colon (X,\mathcal{T}) \to (X',\mathcal{T}')$ una biyección continua. Supongamos que $(X,\mathcal{T})$ es compacto y que $(X',\mathcal{T}')$ es Hausdorff. Entonces f es un homeomorfismo.*

2.11 Topologia inducida por una familia de funciones

Sea X un conjunto,el cual queremos "topologizar" siguiendo el siguiente criterio: dada una familia de funciones

$$\{f_i\}_{i\in I},\ f_i\colon X \to Y_i$$

con $(Y_i,\mathcal{T}_i)$ espacios topológicos, nos interesa construir una topología $\mathcal{T}$ en X de modo tal que $\forall i \in I, f_i\colon (X,\mathcal{T}) \to (Y_i,\mathcal{T}_i)$ sea continua. Una manera trivial de realizar lo anterior es tomar simplemente $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, pero claramente esta alternativa está lejos de ser satisfactoria en general. El problema es en realidad encontrar la "mejor" topología posible (la mas peque'na omenos fina) que tenga la propiedad buscada. Observemos que en principio no es obvio que tal topología exista. Responderemos el problema de la existencia de una tal topología y de cómo obtenerla simultáneamente. Primero, para que f_i sea continua dada una topología $\mathcal{T}$ en X debe tenerse $f_i^{-1} \in (\mathcal{T}_i) \subseteq \mathcal{T}$. Por lo tanto, toda topología $\mathcal{T}$ que satisfaga la propiedad requerida es tal que

$$\mathcal{T} \supseteq \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) = \{f_i^{-1}(V) \mid i \in I,\ V \in \mathcal{T}_i\}$$

y en particular $\mathcal{T} \supseteq \mathcal{T}(\mathcal{A})$, la topología generada por $\mathcal{A}$. La topología buscada es entonces $\mathcal{T}(\mathcal{A})$, que a veces se denota $(\mathcal{T}(\{f_i\}_{i \in I}))$ para hacer explicita la dependencia de la familia de funciones.

Ejemplo 2.11.1

Observación: En general, si hay mas de una funci'on en $\{f_i\}_{i \in I}$ entonces $\mathcal{A} = \cup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{T}_i) = \{f_i^{-1}(V) \mid i \in I,\ V \in \mathcal{T}_i\}$ no es topología y es necesario tomar la topología generada por $\mathcal{A}$

2.11.1 Topología producto

Proposición 2.11.1 *Sean $f_i \colon X \to Y_i$ funciones e $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ espacios topológicos, $i \in I$. Sea $(\mathcal{T}(\{f_i\}_{i \in I}))$ la topología inducida por $\{f_i\}_{i \in I}$ en X. Entonces:*

1. *Si $(Z, \mathcal{T}_Z)$ es un espacio topológico entonces $f \colon (Z, \mathcal{T}_Z) \to (X, \mathcal{T})$ es continua si y sólo si*

$$\forall i \in I,\ f_i \circ f \colon (Z, \mathcal{T}_Z) \to (Y_i, \mathcal{T}_i)$$

2. *Una red $\{x_j\}_{j \in D}$ en X converge a $x \in X \iff \forall i \in I,\ f_i(x_j) \to f_i(x)$ en Y_i*

3. *Si $\{f_i\}_{i \in I}$ " separa puntos en X" (i.e. $\forall x, y \in X$ con $x \neq y$, $\exists i \in I \mid f_i(x) \neq f_i(y)$ en Y_i) entonces:*

$$\forall i \in I,\ (Y_i, \mathcal{T}_i) \text{ es Hausdorff} \Rightarrow (X, \mathcal{T}) \text{ es Hausdorff}$$

Ejemplo 2.11.2

Proposición 2.11.2 *Sea $(X, \mathcal{T}) = (\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} \mathcal{T}_i)$ un espacio producto. Entonces:*

1. *$\forall i \in I$, la i–ésima función proyección $p_i \colon X \to X_i$ es continua y abierta.*

2. $(X,\mathcal{T})$ *es Hausdorff* $\Leftrightarrow \forall i \in I,\ (X_i,\mathcal{T}_i)$ *es Hausdorff.*

3. *Si* $(Z,\mathcal{T}_Z)$ *es un espacio topológico entonces* $f\colon (Z,\mathcal{T}_Z) \to (X,\mathcal{T})$ *es continua* $\iff \forall i \in I$, *la función coordenada i–ésima* $f_i = p_i \circ f\colon (Z,\mathcal{T}_Z) \to (X_i,\mathcal{T}_i)$ *es continua.*

4. *Una red* $\{x^j\}_{j\in D}$ *converge a* $x \in X \iff \forall i \in I$, *la coordenada i–ésima* $x_i^j = p_i(x^j)$ *converge a* $x_i = p_i(x)$

5. *Si* $A_i \subseteq X_i$ *entonces* $\overline{\prod_{i\in I} A_i} = \prod_{i\in I} \overline{A_i}$. *En particular, el producto de cerrados es cerrado (a diferencia de lo que ocurre con el producto de abiertos que en general no es abierto).*

6. *Si* $A_i \subseteq X_i$ *y* $\mathcal{T}_{A_i}$ *es la topología traza de* $\mathcal{T}_i$ *sobre* A_i, *entonces* $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_{A_i} = \mathcal{T}_{\prod_{i\in I} A_i}$, *es decir, "el producto de la topología traza es la traza de la topología producto"*

Definición 2.11.1 *Sea* $\prod_{i\in I} X_i$ *un producto cartesiano arbitrario y sea* $y^0 = (y_i^0)_{i\in I}$ *un punto dado. Pracada* j *se define el corte en* $\prod_{i\in I} X_i$ *a travez de* y^0 *paralelo a* X_j *como*

$$C(y^0;j) = X_j \times \prod_{i\neq j}\{Y_i^0\} \subseteq \prod_{i\in I} X_i.$$

Ejemplo 2.11.3

Teorema 2.11.1 *La función* $c_j\colon X_j \to C(y^0;j)$ *dada por* $c_j(x) = \{x\}\times\prod_{i\neq j}\{y_i^0\}$ *es un homeomorfismo.*

Teorema de Tychonoff

Teorema 2.11.2 (Tychonoff) *Sea* $\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos no vacíos. Entonces* $(\prod_{i\in I} X_i, \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i)$ *es compacto si y sólo si* $\forall i \in I,\ (X_i,\mathcal{T}_i)$ *es compacto.*

Corolario 2.11.1 *Un subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *(dotado de la topología usual) es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

2.11.2 Topología cuociente

Ahora estudiaremos el caso en que el espacio a topologizar usando una familia de funciones es el espacio de llegada. Mas precisamente, sea $\{(X_i,\mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y consideremos una familia de funciones

$$\{f_i\}_{i\in I},\ f_i\colon X_i \to Y,$$

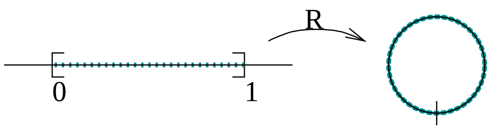
con Y un conjunto fijo. queremos dotar a Y de la mejor topología $\mathcal{T}$ que haga $f_i\colon (X_i, \mathcal{T}_i) \to (Y, \mathcal{T})$ continua para todo $i \in I$. Evidentemente si tomamos la topología grosera $\mathcal{T} = \{\varnothing, Y\}$ entonces se tiene la continuidad de las funciones f_i, pero en general esta topolog'ia no será satisfactoria, porlo que buscamos refinarla lo más posible. Sea $\mathcal{T}$ una topología que satisface la propiedad buscada, tenemos que $\mathcal{T} \subseteq \{V \subseteq Y \mid \forall i \in I,\ f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_i\}$. Más aún, la familia $\{V \subseteq Y \mid \forall i \in I,\ f_i^{-1}(V) \in \mathcal{T}_i\}$ es una topología en Y (¡verificarlo!) y obviamente satisface la propiedad que nos interesa. llamamos a esta última la topología inducida por $\{f_i\}_{i\in I}$ y la denotaremos $\mathcal{T}(\{f_i\}_{i\in I})$

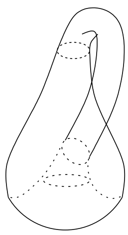
Proposición 2.11.3 *Sea Y dotado de la topología inducida por una familia de funciones $f_i\colon X_i \to Y, i \in I$ con $(X_i, \mathcal{T}_i)$ espacios topológicos. Entonces:*

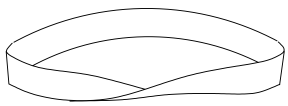
1. $g\colon (Y, \mathcal{T}) \to (Z, \mathcal{T}_Z)$ *es continua ssi.* $\forall i \in I, g \circ f_i$ *es continua*

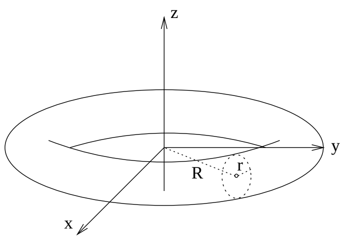
2. $F \subseteq Y$ *es cerrado ssi.* $\forall i \in I,\ f_i^{-1}(F)$ *es cerrado en* $(X_i, \mathcal{T}_i)$.

Ejemplo 2.11.4 (Topología Cuociente)









Proposición 2.11.4 *Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico, $\mathcal{R}$ relación de equivalencia en X y $f\colon X \to Y$ una función compatible con $\mathcal{R}$, i.e $\forall x, x' \in X,\ x\mathcal{R}x' \Rightarrow f(x) = f(x')$. Entonces existe una única función $\tilde{f}\colon X/_{\mathcal{R}} \to Y$ tal que $f = \tilde{f} \circ \varphi$ donde $\varphi\colon X \to X/_{\mathcal{R}}$ es la sobreyección canónica. Además, $\tilde{f}\colon (X/_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{/\mathcal{R}} \to (Y, \mathcal{T})$ es continua ssi. $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ lo es. Más aún, toda función $g\colon (X/_{\mathcal{R}}, \mathcal{T}_{/\mathcal{R}} \to (Y, \mathcal{T})$ continua es de la forma $g = \tilde{f}$ para una única $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$ continua.*

2.12 Conexidad

Intuitivamente, un espacio es conexo si consiste de una sola "pieza" en lugar de varias partes por separado. La formalización de esta simple idea permite desarrollar ciertas herramientas topológicas muy interesantes en análisis.

Definición 2.12.1 (Espacio conexo) *Un espacio $(X, \mathcal{T})$ se dice* Conexo *si no admite una partición formada de dos subconjuntos abiertos (no vacíos y disjuntos). Un subconjunto $Y \subseteq X$ se dice conexo si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ es conexo como subespacio de $(X, \mathcal{T})$.*

Ejemplo 2.12.1

Obsevemos que como los cerrados son los complementos de los abiertos, un espacio conexo tampoco se puede descomponer en dos subconjuntos cerrados no vacíos y disjuntos.

Proposición 2.12.1 *Son equivalentes*

1. *X es conexo*
2. *Los únicos subconjuntos de X que son simultaneamente abiertos y cerrados son $\varnothing$ y X*
3. *Si $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (\{0, 1\}, \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\})$ es continua entonces* no *es sobreyectiva.*

La conexidad es un invariante topológico, más aún, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.12.1 *La imagen continua de un espacio conexo es conexa. es decir, si $f\colon (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ es continua y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo.*

Corolario 2.12.1 (Teorema del valor intermedio) *Si $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una funci'on continua u X es conexo entonces f toma todos los valores entre dos cualquiera que asume, i.e. si $f(x) = a$ y $f(x') = b$ con $a \leq b$, entonces $\forall c \in [a, b],\ \exists x'' \in X \mid f(x'') = c$.*

Teorema 2.12.2 *Sea* $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$ *una familia de subconjuntos conexos que tienen al menos un punto en común. Entonces,* $\cup_{i\in I} A_i$ *es conexo.*

Teorema 2.12.3 *Sea* $A \subseteq X$ *un subconjunto conexo. Entonces todo conjunto* B *que satisface* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ *es conexo. En particular, la adherencia de un conexo es conexo.*

Teorema 2.12.4 *Sea* $\{(X_i, \mathcal{T}_i)\}_{i\in I}$ *una familia de espacios topológicos. El espacio producto* $(\prod X_i, \prod \mathcal{T}_i)$ *es conexo si y sólo si* $(X_i, \mathcal{T}_i)$ *es conexo para cada* $i \in I$

Corolario 2.12.2 $\mathbb{R}^n$ *es conexo, asi como también cualquier producto cartesiano de intervalos.*

Definición 2.12.2 *Un subespacio* $(C, \mathcal{T}_C)$ *de un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *se dice* Companente conexa *si* $(C, \mathcal{T}_C)$ *es conexo y no está incluido estrictamente en ningún otro subespacio conexo.*

Teorema 2.12.5 *Las componentes conexas de* $(X, \mathcal{T})$ *forman una partición del espacio.*

Definición 2.12.3 *Un espacio topológico* $(X, \mathcal{T})$ *se dice* Continuo *si es compacto y conexo.*

Definición 2.12.4

- *Sea* $(X, \mathcal{T})$ *un espacio topológico y* $x, y \in X$*. Un camino en* $(X, \mathcal{T})$ *de* x *a* y *es una función continua* $f : [0, 1] \to X$ *tal que* $f(0) = x$ *y* $f(1) = y$
- $(X, \mathcal{T})$ *se dice* Conexo por caminos *si cada par de puntos en* X *puede unirse mediante un camino en* $(X, \mathcal{T})$

Proposición 2.12.2 *Si* $(X, \mathcal{T})$ *es conexo por caminos entonces es conexo.*

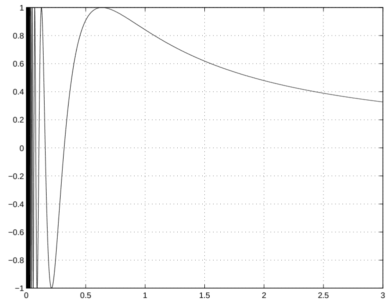


Figura 2.1: Conjunto conexo pero *no* conexo por caminos

Capítulo 3

Completitud En Espacios Métricos

3.1 Sucesiones de Cauchy y Completitud

Definición 3.1.1 *Una sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *en un espacio métrico* (E, d) *es de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, : \forall n, m \geq n_0 \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Proposición 3.1.1 *Toda sucesión convergente en un espacio métrico.* (E, d) *es de Cauchy*

Definición 3.1.2 *Un espacio métrico se dice* Completo *si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Teorema 3.1.1 $\mathbb{R}^n$ *con cualquier métrica equivalente a la distancia Euclidiana es completo.*

Obviamente la completitud no es hereditaria a los subespacios sin condiciones adicionales: basta considerar $]0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$. Sin embargo:

Proposición 3.1.2 *Sea* (E, d) *un espacio métrico completo. Entonces, dado* $F \subseteq X$*, se tiene* (F, d_F) *es completo ssi* F *es cerrado en* (E, d)*.*

Teorema 3.1.2 (Cantor) *Un espacio métrico* (E, d) *es completo ssi cada vez que* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una familia no–creciente* $(F_{n+1} \subseteq F_n)$ *de subconjuntos cerrado y no vacíos de* E *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$*, entonces* $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ *es un síngleton.*
$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ *y se conoce como el diámetro de* A*.*

3.2 Aplicaciones de la completitud

Muchos problemas en matemáticas pueden formularse como encontrar un punto $x \in E$ tal que $f(x) = x$ para una función $f\colon E \to E$ y (E, d) un espacio métrico. Por ejemplo, supongamos que E es un espacio vectorial normado y nos interesa resolver la ecuación de la forma $F(x) = 0$ para algún $F\colon E \to E$. Basta definir $f(x) = (I + F)(x) = x + F(x)$ para que el problema se escriba como $f(x) = x$. Un punto x con esta propiedad se llama punto fijo de f

Definición 3.2.1 *Sea (E, d) un espacio métrico. Una función $f\colon E \to E$ se dice una* Contracción *(relativa a d) si $\exists \alpha < 1$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \quad \forall x, y \in E$$

Teorema 3.2.1 *Sea (E, d) un espacio métrico completo y $f\colon E \to E$ una contracción relativa a d. Entonces $\exists! \bar{x} \in E$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$.*

Observación:

- Más adelante veremos una aplicación de este resultado a la existencia de soluciones de una EDO.
- La propiedad de ser contractante no se verifica con facilidad y en algunos casos no se tiene, lo que ha motivando la extención de este resultado, al menos en lo que se refiere a la existencia del punto fijo, en diversas direcciones.

Otra aplicación es el teorema de Categoria de Baire

Definición 3.2.2 *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice espacio de Baire si toda intersección numerable de abiertos densos esdenso en $(X, \mathcal{T})$.*

Proposición 3.2.1 *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire y $\mathcal{F} = \{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de subconjuntos cerrados en $(X, \mathcal{T})$ tal que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = X,$$

entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{Int}(F_{n_0}) \neq \varnothing$

Definición 3.2.3 *Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice conjunto frontera si $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, lo que equivale a decir que $A \subseteq \mathrm{Fr}(A)$; A se dice de primera categoría si es la unión numerable de conjuntos frontera cerrados, y si A no es de primera categoría, A se dice de segunda categoría.*

Proposición 3.2.2 *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio de Baire y $A \subseteq X$ es de primera categoría, entonces* $\operatorname{Int}(A) = \varnothing$

Teorema 3.2.2 (Baire) *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio completo entonces es un espacio de Baire. En particular, X es de segunda categoría.*

3.3 Compacidad y completitud

Dado (E, d) espacio métrico decimos que $A \subseteq E$ es acotado si $\delta(A) < +\infty$

Definición 3.3.1 *Un espacio métrico (E, d) se dice precompacto o totalmente acotado si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento abierto finito de E medianteconjuntos de diámetro $\leq \varepsilon$.*

Teorema 3.3.1 *Sea (E, d) un espacio métrico. las siguientes son equivalentes:*

1. *(E, d) es compacto*

2. *(E, d) es precompacto y completo*

Definición 3.3.2 *Un subconjunto $A \subseteq X$ con $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico se dice* Relativamente Compacto *si y sólo si $\overline{A}$ es compacto en $(X, \mathcal{T})$.*

Proposición 3.3.1 *Sea (E, d) un espacio métrico. $A \subseteq E$. Entonces:*

1. *A es precompacto $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ es precompacto (ambos dotados de las métricas inducidas)*

2. *Si (E, d) es completo entonces: A es relativamente compacto $\Leftrightarrow$ A es precompacto*

3.4 Completación

Sea (E, d) un espacio métrico. Supongamos que (E, d) es completo y sea $A \subseteq E$. Si A no es cerrado entonces (A, d_A) no es completo pero $(\bar{A}, d_{\bar{A}})$ sí lo es.
Notemos que la inclusión $i\colon A \hookrightarrow \overline{A}$ satisface

$$d_{\bar{A}}(i(x), i(y)) = d_A(x, y) \text{ y que } \overline{i(A)} = \overline{A},$$

y ademas $(\bar{A}, d_{\bar{A}})$ es el subespacio completo más pequeño que contiene a (A, d_A).

Definición 3.4.1 *Dos espacios métricos* (E_1, d_1) *y* (E_2, d_2) *se dicen* Isométricos *si existe una función* $\varphi\colon E_1 \to E_2$ *biyectiva tal que*

$$\forall x, y \in E_1,\ d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y).$$

La función φ *se llama isometría y es un homeomorfismo entre* $(E_1, \mathcal{T}(d_1))$ *y* $(E_2, \mathcal{T}(d_2))$. *Si la isometría es solo sobreyectiva, entonces* (E_1, d_1) *y* $(\varphi(E_2), d_2)$ *sí son isométricos.*

Notemos que con esta definición podemos decir que todo subespacio métrico (A, d_A) de un espacio métrico completo es isométrico a un subespacio denso de un espacio completo, que resulta ser $(\bar{A}, d_{\bar{A}})$. En realidad esta propiedad es más general,comolo establece el siguiente resultado.

Teorema 3.4.1 *Todo espacio métrico* (E, d) *es isométrico a un espacio métrico denso de un espacio métrico completo. Más precisamente, existe un espacio métrico completo* $(\hat{E}, \hat{d})$, *único salvo isometría, y una inyección isométrica*

$$\varphi\colon (E, d) \to (\hat{E}, \hat{d})$$

tal que $\overline{\varphi(E)} = \hat{E}$.

3.5 Espacio de funciones continuas

Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto e $(Y, \mathcal{T})$ un espacio topológico y consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}(X, Y) = Y^X = \prod_{x \in X} Y = \{f\colon X \to Y \mid\ f \text{ es función }\},$$

el cual puede dotarse de la topología de la "convergencia puntual", que no es otra cosa que la topología producto, de modo tal que una red

$$\{f_i\}_{i \in D} \subseteq \mathcal{F}(X, Y)$$

converge a $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ si y sólo si

$$\forall x \in X,\ f_i(x) \to f(x).$$

Algunos subespacios interesantes son:

1. Si $(X, \mathcal{T}_X)$ es un espacio topológico definimos

$$\mathcal{C}(X, Y) := \{f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}) \mid\ f \text{ es continua}\}$$

2. Si (Y,d) es un espacio métrico, definimos

$$\mathcal{B}(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid \ f \text{ es acotada}\}$$

3. Si $(X,\mathcal{T}_X)$ es un espacio topológico e (Y,d) es un espacio métrico

$$\mathcal{C}_b(X,Y) := \{f\colon X \to Y \mid \ f \text{ es continua y acotada}\}$$

Los cuales podemos dotar de la topología traza de la topología producto, i.e. la topología de la convergencia puntual.
En adelante supondremos que (Y,d) es un espacio métrico. Dadas $f,g \in \mathcal{B}(X,Y)$, definimos

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in X} d(f(x),g(x)),$$

la cual está bien definida pues si fijamos $x_0 \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(f(x),g(x)) &\leq d(f(x),f(x_0)) + d(f(x_0),g(x_0)) + d(g(x_0),g(x)) \\ &\leq \delta(f(X)) + \delta(g(X)) + d(f(x_0),g(x_0)) < \infty \end{aligned}$$

Más aún, $d_\infty\colon \mathcal{B}(X,Y)\times\mathcal{B}(X,Y) \to \mathbb{R}_+\cup\{0\}$ es una métrica (¡vericarlo!), luego $(\mathcal{B}(X,Y),d_\infty)$ es un espacio métrico.

Proposición 3.5.1 *Si (Y,d) es un espacio métrico completo entonces $(\mathcal{B}(X,Y),d_\infty)$ también lo es. Más aún, si además $(X,\mathcal{T})$ esun espacio topológico entonces $\mathcal{C}_b(X,Y)$ es un subconjunto cerrado en $(\mathcal{B}(X,Y),d_\infty)$; en particular, $(\mathcal{C}_b(X,Y),d_\infty)$ es completo.*

Observación: En general $\mathcal{C}_b(X,Y)$ no es cerrado en $\mathcal{B}(X,Y)$ para la topolog'ia de la convergencia puntual. Por ejemplo,

$$f_n\colon]0,1[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \min\{n,\frac{1}{x}\}$$

converge puntualmente a $f(x) = \frac{1}{x}$, que no es acotado.

3.6 Compacidad en $(\mathcal{C}(K,Y),d_\infty)$: Teorema de Arzela–Ascoli

En diversas aplicaciones del análisis la compacidad de subconjuntos de espacios de funciones juega un rol esencial. En esta sección daremos un criterio util en la practica para verificar la compacidad de subconjuntos de $\mathcal{C}(X,Y)$ dotado de la métrica uniforme d_∞ inducida por el espacio m'etrico (Y,d) en el caso en que $(K,\mathcal{T})$ es un espacio topológico compacto. Ya hemos visto en la sección (3.3) que completo y acotado no es un buena caracterización (en efecto, el subconjunto

$$\{f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\} \subseteq \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$$

es acotado y cerrado en un completo, luego completo sin embargo no es compacto). Por otra parte la caracterización completo y precompacto (i.e totalmente acotado) no siempre es facil de verificar directamente. Intentaremos aprovechar la estructura particular de $\mathcal{C}(K,Y)$ para caracterizar la compacidad.

Definición 3.6.1 (Equicontinuidad) *Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico e (Y,d) en espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}(X,Y)$ se dice equicontinuo si*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x_0 \in X)(\exists V = V(x_0,\varepsilon) \in \mathcal{N}_{x_0})(\forall x \in V)(\forall f \in \mathcal{A})d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Notemos que si $\mathcal{A}$ es equicontinuo entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(X,Y)$

Teorema 3.6.1 (Arzela–Ascoli) *Sea $(K,\mathcal{T})$ un espacio topológico compacto e (Y,d) un espacio métrico completo. Un subconjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(K,Y)(= \mathcal{C}_b(X,Y))$ es relativamente compacto en $(\mathcal{C}(K,Y), d_\infty)$ si y s'olo si*

1. *$\mathcal{A}$ es equicontinuo*
2. *$(\forall x \in K)$ el conjunto $\mathcal{A}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{A}\}$ es relativamente compacto en Y.*

3.7 Densidad en $(\mathcal{C}(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$: Teorema de Stone–Weierstrass

Definición 3.7.1 (Espacio de Banach) *Sea E un espacio vectorial (sobre el cuerpo de los reales o los complejos). Si $\|\cdot\|$ es una norma en E tal que el espacio $(E,\|\cdot\|)$ es completo, entonces se dice que $(E,\|\cdot\|)$ es un espacio de Banach*

Observación: Si $F \subseteq E$ es un espacio vectorial cerrado y $(E,\|\cdot\|)$ es Banach, entonces $(F,\|\cdot\|)$ también lo es

Definición 3.7.2 (Algebra de funciones) *Sea $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ un cuerpo. Un subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, donde $X \neq \varnothing$ es un conjunto, se dice álgebra si:*

1. *$\forall f, g \in A,\ f + g \in A$ y $f \cdot g \in A$. ($(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$).*
2. *$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall f \in A,\ \lambda f \in A$.*

Ejemplos:

- Los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$(de una o varias variables) forman un álgebra.

- Si $\varphi \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ entonces el álgebra A ms pequeña tal que $\varphi \in A$ está caracterizada por

$$A_{\varphi} = \{\lambda_1 \varphi + \cdots + \lambda_n \varphi^n \mid n \geq 1, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

  y se llama el álgebra de funciones generada por φ. Se puede proceder de manera análoga para el álgebra generada por la familia $\varphi_0, \ldots, \varphi_r$ de funciones en $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.

- Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico, $C(X, \mathbb{K})$ es un 'algebra.

Definición 3.7.3 *Se dice que un subconjunto $A \subseteq \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ separa puntos de X si para todo par de puntos $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe una función $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.*

Teorema 3.7.1 (Stone–Weierstrass) *Sea $(K, \mathcal{T})$ un espacio topológico compacto y sea $A \subseteq \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ un álgebra. Si A contiene a las funciones constantes y ademas separa puntos de K, entonces $\overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.*

Corolario 3.7.1 *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compacto y $n \geq 1$. Toda función continua sobre K a valores reales puede aproximarse uniformemente mediante polonomios en n variables, i.e.*

$$\forall f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}),\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists P(x_1, \ldots, x_n) \text{ polinomio tal que } \|f - P\|_\infty < \varepsilon$$

Capítulo 4

Espacios de Hilbert

4.1 Definiciones y propiedades básicas

La norma de un vector en $\mathbb{R}^n$ permite medir su "tamaño". De todas las normas posibles la que más se aproxima a nuestra idea intuitiva de "longitud" es la norma euclidiana, que puede definirse a pratir del producto interno usual $x^t y$ con $x, y \in \mathbb{R}^n$ como $\|x^t x\|$. Pero la noción de producto interno no sólo permite inducir una norma sino que trae consigue la idea de "ortogonalidad", cuya generalización a otros espacios es muy útil en las aplicaciones del Análisis. El objetivo de este capítulo es estudiar las principales propiedades de los espacios vectoriales dotados de un producto interno.

Definición 4.1.1 *Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$. Un producto interno en E es una función $< \cdot, \cdot >: E \times E \to \mathbb{K}$ que satisface las siguientes propiedades:*

PI1.- $(\forall x, y, z \in E) < x + y, z > = < x, z > + < y, z >$

PI2.- $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall x, y \in E) < \lambda x, y > = \lambda < x, y >$

PI3.- $(\forall x, y \in E) < y, x > = \overline{< x, y >}$

PI4.- $(\forall x \in E)[< x, x > \geq 0 \wedge (< x, x > = 0 \Rightarrow x = 0)]$

Un par $(E, < \cdot, \cdot >)$ donde $< \cdot, \cdot >$ es un producto interno se dice espacio vectorial con producto interno (e.v.p.i.) o "semi–Hilbert".

Observemos que si tomamos $y = x$ en (4.1.1) entonces

$$< x, x > = \overline{< x, x >} \Leftrightarrow < x, x > \in \mathbb{R},$$

y en particular la desigualdad en (4.1.1) tiene sentido.

Definición 4.1.2 *Sea* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un e.v.p.i., definimos la* Norma Euclidiana *en* E *mediante*

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : E & \to & \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \\ x & \to & \|x\| = \sqrt{< x, x >} \end{array}$$

La función $\|\cdot\|$ *así definida resulta ser una norma en* E, *y diremos que* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *es un* Espacio de Hilbert *si* $(E, \|\cdot\|)$ *es completo (i.e.* $(E, \|\cdot\|)$ *es un espacio de Banach).*

Lema 4.1.1 (Cauchy–Schwarz) *Sea* $(E, < \cdot, \cdot >)$ *un e.v.p.i. Entonces*

$$\forall x, y \in E, \ |< x, y >| \leq \|x\|\|y\|,$$

con igualdad ssi $\{x, y\}$ *son l.d.*

En lo que sigue $(E, < \cdot, \cdot >)$ es un e.v.p.i. y $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana inducida por $< \cdot, \cdot >$
Un elemento x de E se dice *Vector unitario* si $\|x\| = 1$. Obviamente, si $x \neq 0$ entonces $\frac{x}{\|x\|}$ es un vector unitario. Dos elementos $x, y \in E$ se dicen perpendiculares u *Ortogonales* si $< x, y >= 0$, en cuyo caso escribimos $x \perp y$. Si $A \subseteq E$ es un subconjunto y $x \in E$ es tal que $\forall y \in A, < x, y >= 0$, escribimos $x \perp A$. Definimos $A^\perp := \{x \in F \mid x \perp A\}$. se tiene que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de E; en efecto, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x_1, x_2 \in A^\perp$ entonces

$$\forall y \in A, \ < \alpha x_1 + \beta x_2, Y >= \alpha < x_1, y > + \beta < x_2, y >= 0,$$

de modo que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in A^\perp$ y obviamente $0 \in A^\perp$. Obviamente, $E^\perp = \{0\}$ y $\{0\}^\perp = E$

4.2 Base Hilbertiana y Descomposición Ortogonal

Sea $(E, < \cdot, \cdot >)$ un e.v.p.i., y consideramos una familia no vacía $\{x_i\}_{i \in I}$ de elementos de $E \setminus \{0\}$. El conjunto definido por

$$< \{x_i\}_{i \in I} >:= \{\lambda_1 x_{i_1} + \cdot + \lambda_n x_{i_n} \mid n \leq 1, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \{i_1, \ldots, i_n\}\}$$

es un subespacio vectorial de E y se llama espacio generado por $\{x_i\}_{i \in I}$. Diremos que $\{x_i\}_{i \in I}$. es *Total* si

$$\overline{< \{x_i\}_{i \in I} >}^{\|\cdot\|} = E.$$

Diremos que $\{x_i\}_{i \in I}$ es una familia *Ortogonal* si sus mienbros son mutuamente perpendiculares; i.e. $\forall i \neq j, \ x_i \perp x_j$ y ademas $\|x_i\| \neq 0$, y diremos que la familia es *Ortonormal* si ademas se satisface $\forall i \in I, \ \|x_i\| = 1$

Definición 4.2.1 *Una familia* $\{x_i\}_{i\in I}$ *se llama* Base Hilbertiana *de* E *(o base ortonormal) si es total y ortonormal.*

Observación: No confundir con la noción de base (de Hamel) en Álgebra, pues no necesariamente todo elemento puede escribirse como una combinaci'on lineal de un número finito de mienbros de la base Hilbertiana, en caso que esta exista.

Teorema 4.2.1 *Sea* $\{x_i\}_{i=1}^n$ *una familia ortogonal en* E. *Sea* $\{a_i\}_{i=1}^n$ *una familia de escalares en* $\mathbb{K}$. *Entonces*

$$\forall x \in E,\ \|x - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\| \leq \|x - \sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$$

con $c_i := \frac{<x,x_i>}{<x_i,x_i>}$, $i = 1, \ldots n$ *los escalares* c_i *así definidos se llaman* Coeficientes de Fourier *de* x *con respecto a* x_i.

Observación: El punto $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ donde c_i es el coeficiente de Fourier de x con respecto a x_i se llama proyecci'on ortogonal de x sobre el subespacio $< x_1, \ldots, x_n >$ generado por $\{x_i\}_{i=1}^n$
Nos interesa generalizar este procedimiento al caso de familias infinitas por lo que necesitaremos "tomar límites" y en consecuencia supondremos que el espacio es completo.
En lo que sigue $(H, < \cdot, \cdot >)$ denota un espacio de Hilbert y $\|\cdot\|$ la norma inducida por $< \cdot, \cdot >$

Teorema 4.2.2 *Sea* $F \subseteq H$ *un subespacio vectorial cerrado. Entonces* $\forall x \in E,\ \exists! \hat{y} \in F$ *tal que*

$$\|x - \hat{y}\| = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\},$$

con $\hat{y}$ *caracterizado por*

$$\begin{cases} y \in F \\ \forall y \in F,\ < x - \hat{y}, y >= 0 \end{cases}$$

Al punto $\hat{y}$ *se le llama proyección ortogonal de* x *sobre* F *y se denota* $\hat{y} = P_F x$.

Corolario 4.2.1 *Sea* $F \subseteq H$ *un subespacio cerrado. Si* $F \neq H$ *entonces* $F^\perp \neq \{0\}$

Corolario 4.2.2 *Sea* $F \subseteq H$ *un subespacio tal que* $F^\perp = \{0\}$. *Entonces* F *es denso en* H.

Corolario 4.2.3 *Supongamos que $H \neq \{0\}$. Entonces existe una base Hilbertiana para H.*

Corolario 4.2.4 *Si $F \subseteq H$ un subespacio vectorial cerrado entonces $H = F \oplus F^{\perp}$*

Definición 4.2.2 *Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de subespacios cerrados de H. Decimos que H es* Suma Hilbertiana *de $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, lo que anotamos*

$$H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F_n,$$

si y sólo si

1. $\forall n \neq m,\ F_n \perp F_m$, *i.e.* $\forall x \in F_n, \forall y \in F_m,\ < x, y >= 0$
2. *El espacio vectorial $< \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} >$ generado por $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en H, i.e.* $\overline{< \{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} >}^{\|\cdot\|} = H$.

Teorema 4.2.3 *Supongamos que $H = \oplus_{n\in\mathbb{N}} F_n$, con $F_n \subseteq H$ subespacio vectorial cerrado. Sea $x \in H$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $x_n = P_{F_n} x$. Entonces*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x_n \tag{4.1}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 \quad \textit{(Identidad de Bessel–Parseval).} \tag{4.2}$$

Reciprocamente, dada una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in F_n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty$, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ es convergente a un punto $x \in H$ y se satisface que $x_n = P_{F_n} x$.

Corolario 4.2.5 *Si H admite una base Hilbertiana numerable $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces todo $x \in H$ se escribe*

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} < x, e_n > e_n, \ \text{con } \|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |< x, e_n >|^2$$

Más aún, la función

$$\varphi\colon l^2(\mathbb{K}) \to H$$
$$\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \to \varphi(\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n e_n,$$

define un isomorfismo isométrico.

Teorema 4.2.4 *Si H es separable entonces admite una base Hilbertiana numerable.*

4.3 Dualidad y topología débil

Sea $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función lineal. Tenemos que $l(x,y) = l(x(1,0) + y(0,1)) = xl(1,0) + yl(0,1) = ax + by$ con $a = l(1,0)$ y $b = l(0,1)$. Luego toda función lineal $l\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de la forma

$$l(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

lo que induce una correspondencia entre las funciones lineales de $\mathbb{R}^2$ a valores en $\mathbb{R}$ y vectores en $\mathbb{R}^2$. Veremos que esto se generaliza a espacios de Hilbert. Antes necesitamos algunas definiciones y propiedades.
Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos e.v.n. sobre un cuerpo $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$. Denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ el espacio vectorial de las funciones lineales continuas de E a valores en F.

Lema 4.3.1 *Una función lineal $l\colon E \to F$ es continua si y sólo si*

$$\exists c > 0 \ : \ \forall x \in E, \|l(x)\|_F \leq c\|x\|_E$$

Este lema nos permite definir una norma en $\mathcal{L}(E,F)$ mediante

$$\begin{aligned} \|l\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \inf\{c > 0 \mid \forall x \in E, \|l(x)\|_F \leq c\|x\|_E\} \\ &= \sup\{\|l(x)\|_F \mid \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

y se satisface:

$$\forall x \in E, \|l(x)\|_F \leq \|l\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

Lema 4.3.2 *Si $(F, \|\cdot\|_F)$ es un espacio de Banach entonces $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{L(E,F)})$ es Banach*

Definición 4.3.1 *El espacio Banach $L(E,\mathbb{K})$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C})$ se llama* Esspacio Dual*(Topológico) de E, y se denota por E^* o tambien por E' y está dotado de la norma dual*

$$\|l\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} |l(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E \leq 1}} l(x)$$

Cuando $l \in E^*$ y $x \in E$ se define $< x, l >_{E,E^*} = l(x)$ y $< \cdot,\cdot >_{E,E^*}$ se llama producto de dualidad entre E y E^*. Un elemento $l \in E^*$ se conoce como Funcional Lineal.

Teorema 4.3.1 (Teorema de representación de Riez–Fréchet) *Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un Hilbert. Entonces, $\forall l \in H^*$, $\exists! y \in H$ tal que $\forall x \in H$, $l(x) =< x, y >$, i.e $< x, l >_{H,H^*} =< x, y >$. Más aún, se tiene que $\|l\|_{H^*} = \|y\|$ y la correspondencia $y \in H \to l_y \in H^*$ con $l_y(x) =< x, y >$ es un isomorfismo (semi–)lineal isométrico.*

Definición 4.3.2 *La* Topología Débil *sobre H, denotada por $\sigma(H, H^*)$, es la topología menos fina sobre H que hace que todos los funcionales de H^* sean continuos. Más precisamente si dado $y \in H$ consideramos $l_y(x) =$ ¡x,y¿ entonces $\sigma(H, H^*) = \mathcal{T}(\{l_y\}_{y \in H})$ es la topolog'ia generada por la familia de funciones $l_y : H \to \mathbb{R}$ en el sentido de 2.11*
Obviamente, $\sigma(H, H^*) \subseteq \mathcal{T}(\|\cdot\|)$, la topología inducida por la norma o Topología Fuerte

Como consecuencia de la proposición 2.11.1 se tiene

Proposición 4.3.1

1. *Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico entonces una función $f : (X, \mathcal{T}) \to (H, \sigma(H, H^*))$ es continua si y sólo si*

$$\forall l \in H^*,\ l \circ f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{usual}})$$

es continua.

2. *Una red $\{x_i\}_{i \in D}$ en H converge a x si y sólo si*

$$\forall y \in H, l_y(x_i) =< x_i, y > \to < x, y >= l_y(x)$$

3. *$(H, \sigma(H, H^*)$ es un espacio de Hausdorff*

Notación: La convergencia para la topologı́a débil se suele denotar por $x_i \rightharpoonup x$. (Obs: $x_i \rightharpoonup x \Leftrightarrow (x_i - x) \rightharpoonup 0$.)

Proposición 4.3.2 *Sea $\{x_i\}_{i \in D}$ una red en H.*

1. *Si $x_i \to x$ fuertemente en H entonces $x_i \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(H, H^*)$*
2. *Si $x_i \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(H, H^*)$ e $y_i \to y$ fuertemente en H entonces $< x_i, y_i > \to < x, y >$.*

Lema 4.3.3 *Si $x_i \rightharpoonup x$ débilmente para $\sigma(H, H^*)$ entonces $\|x_i\|$ está acotada y ademas*

$$\|x\| \le \liminf \|x_i\|$$

Proposición 4.3.3 *Dado $x_0 \in H$, una base de vecindades de x_0 para $\sigma(H, H^*)$ est'a dada por los conjuntos de la forma*

$$V = \{x \in H \mid |< x - x_0, y_i >| < \varepsilon, \; \forall i \in I\}$$

donde $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq H$ es una familia <u>finita</u> $(|I| < \infty)$.