Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
31 de Marzo de 2009

Auxiliar Análisis: Espacios Vectoriales Normados

Profesor: Rafael Correa
Auxiliares: Roberto Castillo, Andrés Fielbaum, Omar Larré

Pregunta 1

Demostrar el Teorema del Punto Fijo de Banach: *Sea E un espacio de Banach, $A \subseteq E$ un conjunto cerrado y $f : A \to A$ contractante. Entonces f tiene un único punto fijo.* Para ello:
(i) Demuestre la unicidad, es decir, suponga que hay dos puntos fijos y muestre que son iguales.
(ii) Demuestre la existencia del punto fijo; para ello, considere la sucesión dada por $a_0 \in A$ cualquiera, y $a_{k+1} = f(a_k)$ para $k \geq 0$.
(iii) Pruebe además que $\forall k \in \mathbb{N}$, $||a_k - a|| \leq \frac{L^k}{1-L}||a_0 - a||$, donde L es la constante de Lipschitzaneidad de f, y a su único punto fijo.

Pregunta 2

Sea E e.v.n. sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}\, o\, \mathbb{C}$. Al espacio vectorial $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, dotado de la norma de las lineales continuas, se le llama el **dual topólogico de** E, o simplemente el dual de E, y se le nota E^*. Pruebe que $(\ell^1)^*$ se identifica con ℓ^∞, es decir, que existe $\varphi : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$ biyectiva e isométrica.

Pregunta 3 *(Teorema de Dini)*

(i) Sea E e.v.n., $K \subseteq E$ compacto, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K. Pruebe que existe $I \subset \mathbb{N}$ finito tal que $K \subseteq \bigcup_{n\in I} A_n$.
(ii) En el mismo contexto anterior, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de funciones continuas de K en $\mathbb{R}$, convergentes puntualmente a una función f continua. Pruebe que $f_n \to f$ en el espacio $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, dotado de la norma del supremo.