Universidad de Chile

Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas

Departamento de Ingeniería Matemática

Auxiliar #4 MA34B

Profesor: Julio Deride, Auxiliar: Gonzalo Contador.

P1. A comienzos de noviembre la oficina de Difusión de la FCFM debe decidir si hacer o no charlas en la VI región. Como estas charlas tienen cierto costo, lo que interesa a difusión es estimar la proporción p de estudiantes que quieren entrar a la facultad. Para esto, le piden a usted que haga un estudio a partir de una encuesta realizada a n personas de la región, dentro de las cuales z quieren entrar a Beauchef.

a) Suponga que conoce las respuestas dadas por cada uno de los encuestados. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de p está dado por

$$\widehat{p}_{MV} = \frac{z}{n}.$$

b) Verifique que el estimador $\widehat{p}_{MV}$ es consistente.
c) Verifique que la varianza de $\widehat{p}_{MV}$ alcanza la mínima varianza para estimadores insesgados de p.
d) Dado que Difusión viene haciendo el mismo estudio hace años, ellos tienen la idea de que p distribuye a priori según $\pi(p) = ap(1-p)$.Encuentre a y deduzca la distribución a posteriori de p. (Hint: ayudandose de la tabla de distribuciones, complete con constantes respecto a p para encontrar una distribución conocida).
e) Para una función de pérdida cuadrática, encuentre el etimador de Bayes $\widehat{p}_B$ de p.
f) Calcule los errores cuadràticos medios de ambos estimadores, compárelos y decida para que tamaño de encuesta es mejor cada uno. Fundamente.

P2. Considere una m.a.s. de tamaño n de una v.a. $X \sim Bernoulli(p)$, donde $p \sim Beta(\alpha, \beta)$. Encuentre la distribución a posteriori de p, y compare el estimador de los momentos de p con uno dado sin conocer su distribución.

P3. Se quiere estimar el parámetro $\theta \in [0, 2]$ de una variable aleatoria X cuya función de distribución, para $0 < x < 1$, está dada por

$$f(x) = \theta + 2(1 - \theta)x.$$

Por otra parte, se cree a priori que $\theta \sim Uniforme(0, 2)$, y se dispone de una sola observación $\hat{X}$ de X.

a) Determine $\xi(\theta \mid X)$, la densidad a posteriori de θ.
b) Determine el estimador de Bayes para θ bajo función de pérdida cuadrática. ¿Es insesgado?
c) Si el valor observado de X es 0.5, encuentre k tal que $\mathbb{P}(\theta < k) = \frac{1}{2}$.