

Examen

Problema 1.

Sea una muestra aleatoria simple $X_1, \dots, X_n$ de una variable aleatoria $X \sim \mathbf{U}[\theta, \theta + 1]$. Esto es, su función de densidad de probabilidad viene dada por

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & x \in [\theta, \theta + 1] \\ 0 & x \notin [\theta, \theta + 1] \end{cases}$$

- Encuentre el estimador de θ obtenido por el método de los momentos $\hat{\theta}_{MOM}$. Calcule su esperanza $\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MOM}]$ y varianza $\mathbb{V}[\hat{\theta}_{MOM}]$.
- Estudie la existencia y unicidad del estimador de Máxima Verosimilitud.
- Sea el estimador $\hat{\theta}_2 = X_{(n)} - 1 = \max_{i=1, \dots, n} X_i - 1$. Calcule su esperanza $\mathbb{E}[\hat{\theta}_2]$ y varianza $\mathbb{V}[\hat{\theta}_2]$.
- Estudie la consistencia de $\hat{\theta}_{MOM}$ y $\hat{\theta}_2$.
- Calcule y compare los errores cuadráticos medios $\text{ECM}(\hat{\theta}_{MOM}, \theta)$ y $\text{ECM}(\hat{\theta}_2, \theta)$. Concluya.

Problema 2.

Sea $X \rightsquigarrow N(\theta; 1)$, una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 25$ y una media muestral $\bar{x} = 1,23$. Se considera un nivel de significación $\alpha_0 = 0,05$ para los tests.

- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 1,5$. Concluir.
- Dé la región crítica más potente para la hipótesis nula $H_0 : \theta = 1,5$ contra $H_1 : \theta = 1$. Concluir. Especifique la zona de contradicción encontrada entre las dos regiones críticas.
- Calcule los errores de tipo II para los tests (a) y (b).
- Encuentre el tamaño n de la muestra que permite suprimir la zona de contradicción.
- Encuentre el nivel de significación del test que permite suprimir la zona de contradicción.
- Si tomamos $n = 64$, Tendremos una zona de contradicción para el nivel de significación $\alpha_0 = 0,05$? Comente.

Problema 3.

Se consideran los porcentajes promedios por hogar en 8 ítemes de gastos de 19 países del OCDE. Se presenta los resultados de un análisis en componentes principales sobre esta tabla de datos X .

- Interprete los valores propios adjuntos. Dé las proporciones de la varianza reproducida por cada componente principal. Puede dar el rango de X ?, explique.
- Interprete el gráfico adjunto. Cuánto porcentaje de la varianza total se reproduce? En particular, explique que tipo de gastos privilegian los hogares de los países en cada uno de los 4 cuadrantes del gráfico.

- (c) A partir de los valores propios, haga un gráfico del círculo de correlaciones e interprete las dos primeras componentes principales C_1 y C_2 en función de las variables originales.
- (d) Deduzca el valor aproximado y signo de los coeficientes de correlación entre los 8 ítems de gasto.
- (e) Con que aproximación (coeficiente de correlación múltiple R) se puede reproducir el porcentaje de vestuario a partir de las dos primeras componentes principales C_1 y C_2 .

	u1	u2	u3
Valores propios	2.45	1.96	1.40
Alimentación	0.0407	-0.4582	-0.6271
Vestuario	0.5475	-0.1404	0.0381
Alojamiento	-0.4794	-0.0588	0.4614
Muebles	0.4104	-0.1386	0.2188
Educación	-0.0051	0.6305	-0.1005
Transporte	0.0675	-0.4292	0.5441
Diversiones	-0.4289	-0.0473	-0.0985
Otros	0.3344	0.4069	0.1692

