MA34B - Clase Auxiliar 4

P1) Una fábrica de chocolate encargó a dos empresas de estudios de m ercados FRIC y FRAC que estimen el consumo promedio mensual μ de chocolate per capita en la población chilena. La empresa FRIC obtiene los consumos mensuales de chocolate per capita sobre una muestra aleatoria simple $X_1, X_2, ..., X_n$ de tamaño n de media muestral $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$ y varianza muestras $S^2 = \frac{1}{n}\sum_i (X_i - \overline{X})^2$ y la empresa FRAC una muestra aleatoria simple $Y_1, Y_2, ..., Y_m$ de tamaño m de media muestral $\overline{Y} = \frac{1}{m}\sum_i Y_i$ y varianza muestral $T^2 = \frac{1}{m}\sum_i (Y_i - \overline{Y})^2$. Como las estimaciones de μ, $\overline{X}$ y $\overline{Y}$, dadas respectivamente por FRIC y FRAC no son iguales, la fábrica decide combinar las dos estimaciones; proponen dos estimadores:

- $\hat{\mu_1} = \frac{1}{2}\overline{X} + \frac{1}{2}\overline{Y}$
- $\hat{\mu_2} = \frac{n}{n+m}\overline{X} + \frac{m}{n+m}\overline{Y}$

1. Calcule la esperanza y la varianza de ambos estimadores en función de la varianza σ^2 en la población. ¿Cuál de los dos estimadores $\hat{\mu_1}$ y $\hat{\mu_2}$ les parece mejor?

2. Sea $\hat{\mu_a} = a\overline{X} + (1-a)\overline{Y}$ en donde $0 \leq a \leq 1$. Encuentre el valor de a que minimiza la varianza de $\hat{\mu_a}$. Concluye.

3. La fábrica propone ahora tres estimadores para la varianza σ^2 del consumo de chocolate en la población:

   - $\hat{\sigma_1}^2 = \frac{1}{2}S^2 + \frac{1}{2}T^2$
   - $\hat{\sigma_2}^2 = \frac{n}{n+m}S^2 + \frac{m}{n+m}T^2$
   - $\hat{\sigma_3}^2 = \frac{1}{n+m-2}(nS^2 + mT^2)$

   ¿Cuales de estos estimadores son insesgados?

4. Bajo el supuesto de normalidad del consumo, dé las distribuciones de los estadísticos $\frac{nS^2}{\sigma^2}$, $\frac{mT^2}{\sigma^2}$ y $\frac{(n+m-2)\hat{\sigma_3}^2}{\sigma^2}$ y sus varianzas.

5. Deduzca las varianzas de $\hat{\sigma_1}^2$, $\hat{\sigma_2}^2$ y $\hat{\sigma_3}^2$.

6. Concluye sobre cual de los errores cuadráticos medios $E[(\hat{\sigma_1}^2 - \hat{\sigma}^2)^2]$, $E[(\hat{\sigma_2}^2 - \hat{\sigma}^2)^2]$ y $E[(\hat{\sigma_3}^2 - \hat{\sigma}^2)^2]$ es más pequeño.

P2) Si el tiempo de espera de una micro en minutos X para una persona es tal que:

$$f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\frac{1}{\lambda}x}$$

con $x > 0$

Y sea $X_1, X_2, ..., X_n$ una m.a.s. de X:

1. Encuentre E.M.V $\hat{\lambda}$ de λ. Calcule su esperanza y varianza.

2. Encuentre la cota de Cramer-Rao para $\hat{\lambda}$. ¿Es eficiente?

3. Si se observan los valores 2, 2.4, 3, 4.5, 3 encuentre el valor de $\hat{\lambda}$.

4. Plantee la distribución exponencial de esta forma:

$$f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$$

con $x > 0$

HINT: Si $X_i \sim exp(\lambda) \Rightarrow \sum X_i \sim Gamma(n, \lambda)$